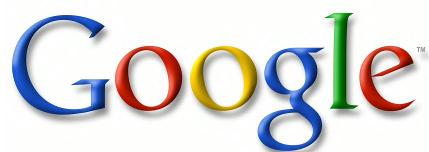
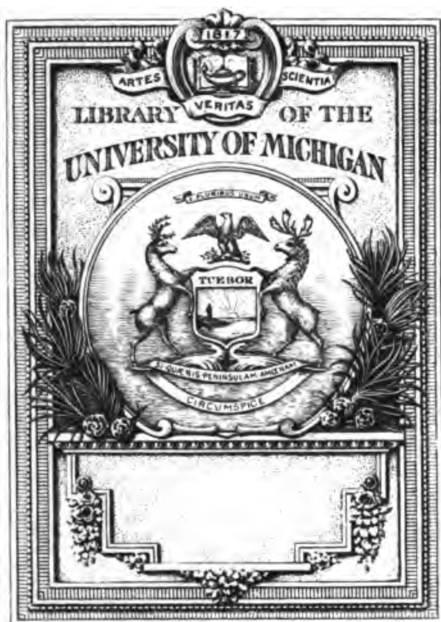



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

N. Nielsen
exam: polyt:

Vilhelm Poss

6/9 79

Den elementære Geometrie.

Lærebog for Eleverne af det kongelige Landcadetacademie.

Hovedsageligen efter tolvte Udgave af Legendre's Geometrie,

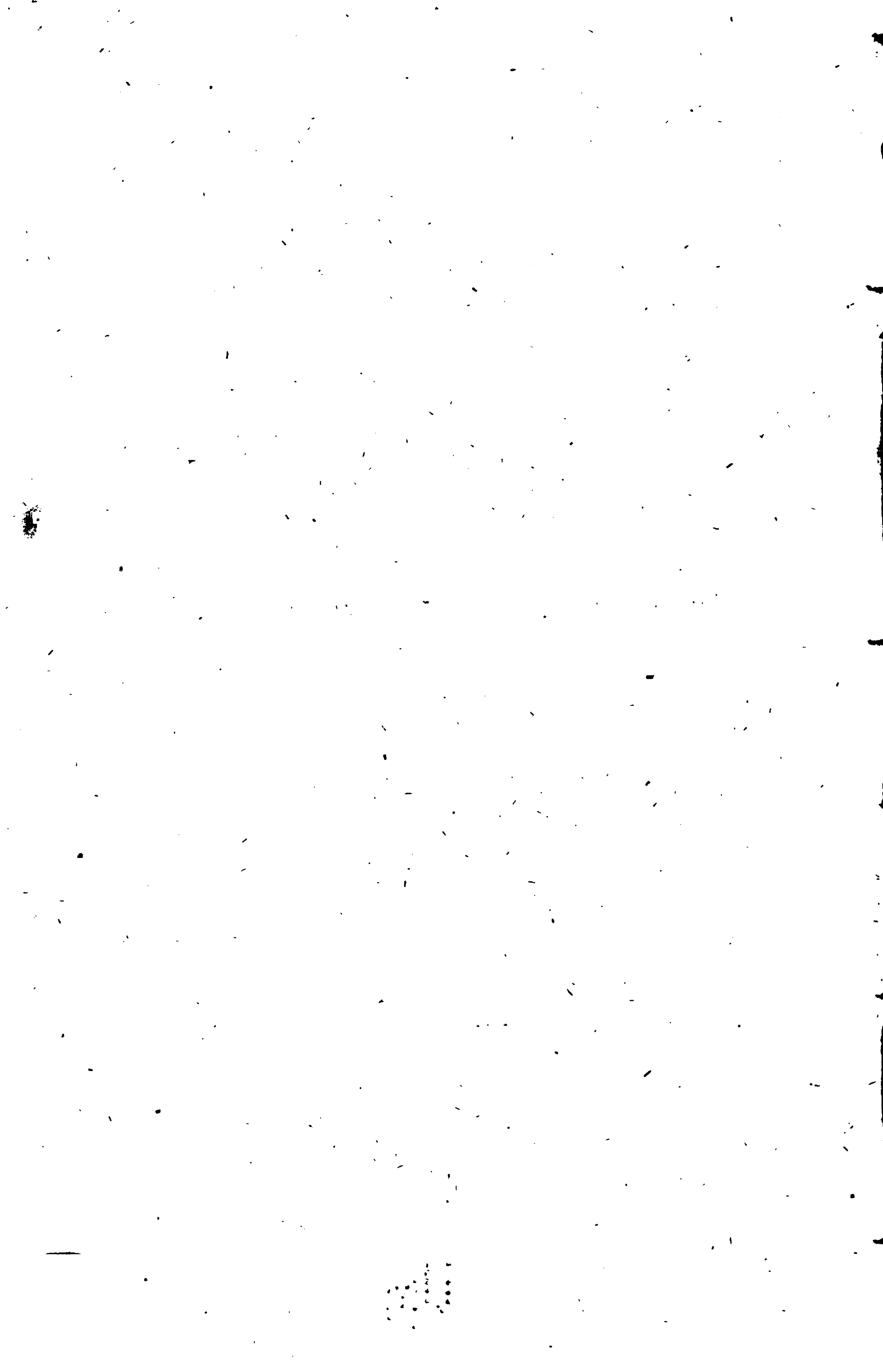
udarbeidet af

C. Hjelte.

Hj[illegible], Johann Christoffer [illegible]

Med IX Planer.

Kjøbenhavn.
Trykt hos Directeur Jens Hostrup Schultz,
Kongelig og Universitets-Bogtrykker.
1833.



Hist of Sci
Heat
4-16-35
-30159

Indhold.

Indledning.

No. Pag.

1— Ved Betragtning af en Gjenstands Begrændsning opstaae Begreberne om dens Udstrækning og Form. 3.
Hvilkensomhelst endelig Deel af Rummet kaldes et Volumen eller geometrisk Legem, og dens Grændse en Flade.
En Flades Grændse kaldes Linie.
En Linies Grændser kaldes Punkter.
Ethvert Legem har tre Dimensioner: Længde, Bredde og Tykkelse (Høide, Dybde); enhver Flade to Dimensioner: Længde og Bredde; enhver Linie een Dimension: Længde. Linier, Flader og Legemer kaldes Rumstørrelser.
Geometrie er Videnskaben om Rumstørrelser.
Rumstørrelser kunne fremstaae ved continuerlig Bevægelse: en Linie ved et Punkt o. s. v.
Rumstørrelser ere continuerlige Størrelser.
Enhver Rumstørrelses Dele ere stedse af samme Natur som det Hele, men Grændsen har een Dimension mindre.

2— En ret Linie er den korteste Linie man kan drage fra et Punkt til et andet. 5.
En brudt Linie eller Polygonlinie, er en Linie sammensat af forskjellige rette Linier.
En krum Linie eller Curve, er en Linie i hvilken ingen Deel er ret.
En Plan er en Flade, i hvilken en ret Linie, der forbinder to hvilkesomhelst Punkter i Fladen, ligger aldeles i denne.
En Flade er krum, naar ingen Deel af samme er plan.
En krum Linie kaldes enkelt-krum eller dobbelt-krum, eftersom den har alle sine Dele i een Plan eller ikke.
En Cirkellinie er en enkelt-krum Linie, i hvilken alle Punkter ligge ligelangt fra eet Punkt i samme Plan som Curven. Dette Punkt kaldes Centrum.

11-1-39 HCM.

a*

№ Pag.
3— Kun to Slags Linier: den rette Linie og Cirkellinien afhandles i den elementære Geometrie. Denne deles i Planimetrien, der handler om Størrelser som kunne construeres i een Plan, og Stereometrien om Størrelser, der ikke kunne construeres i een Plan. 6.
4— Dækning, Congruents er Maaden paa hvilken to Rumstørrelsers Identitet godtgjøres.
Congruente Størrelser have samme Storhed og Form; men Ligestorhed kan finde Sted uden at Dækning er mulig.
5— At maale en Størrelse er at finde dens Forhold til Eenheden. En Rumstørrelse udmaales ved at bringe Eenheden eller deres Fællesmaal paa samme, naar den givne Størrelse er commensurabel; men hvis ikke, da kan Udmaalingen kun skee nærmelsesviis. Undertiden kan, og er det nødvendigt, at føre Udmaalingen tilbage paa andre Størrelsers Sammenligning. 7.

Planimetrie.

I. Linier.

Den rette Linie.

6— Afstanden mellem to Punkter er Længden af en ret Linie, hvis Ender ere disse to Punkter. 9.
Kun een ret Linie kan drages fra eet Punkt til et andet.
7— To givne Punkter bestemme en ret Linies Beliggenhed.
To fælleds Punkter bestemme to rette Liniers Dækning.
To rette Linier kunne ikkun have eet Skjærepunkt.
8— Rette Liniers Addition, Subtraction, Multiplication.
9— At maale Afstanden mellem to Punkter, eller Længden af en ret Linie, er at finde dens Forhold til en anden ret Linie, der tages til Eenhed. 10.
10— Opg. At finde to givne Liniers Forhold, eller i det mindste en Nærmelse til samme. 11.
11— To sammenstødende Linier danne en større eller mindre Vinkel, eftersom de vige mere eller mindre ud fra hinanden. Disse Linier kaldes Vinklens Been, og deres Sammenstødningspunkt dens Toppunkt. 12.
12— To Vinkler ere ligestore, naar den Enes Been dække den Andens.
13— Naar en ret Linie møder en anden, der er udstrakt til begge Sider af

№ Pag.

Sammenstødningspunktet, saa danner den med den sidste to Vinkler, som, med Hensyn til hinanden, kaldes Jevnsidesvinkler.
Naar en ret Linie danner med en anden to ligestore Jevnsidesvinkler, da kaldes disse rette Vinkler, og den første Linie siges at være perpendiculær paa den anden.
En skjæv Vinkel er den, der ikke er ret; den kaldes spids Vinkel, naar den er mindre, stump Vinkel, naar den er større end en ret. 13.
14— Alle rette Vinkler ere ligestore.
15— Summen af to Jevnsidesvinkler er = 2 R (R udtrykker en ret Vinkel).
Naar en Vinkel er ret, da er dens Jevnsidesvinkel ogsaa ret.
Naar en Linie er perpendiculær paa en anden, saa er denne perpendiculær paa hiin.
Alle de Vinkler, som dannes af en ret Linie med andre fra eet Punkt i denne, og til samme Side, udgaaende Linier, ere tilsammen = 2 R.
En Vinkel er Supplement eller Complement til en anden, eftersom deres Sum er liig to eller een ret Vinkel.
16— Naar to Vinkler have eet Been og Toppunkt tilfælleds, og deres Sum = 2 R, da ere de to yderste Been een ret Linie. 14.
17— To Vinkler kaldes, med Hensyn til hinanden, Topvinkler, naar den Enes Been ere Forlængringer af den Andens.
Ved to rette Liniers Overskjæring fremstaae to Par Topvinkler.
18— To Topvinkler ere ligestore. 15.
Summen af de fire Vinkler, der ligge om to rette Liniers Skjærepunkt, er = 4 R; naar den ene er ret, da ere de øvrige ogsaa rette.
Summen af hvilketsomhelst Antal om eet Punkt liggende Vinkler er = 4 R.
19— En Bue er et hvilketsomhelst Stykke af en Cirkellinie.
En Radius er en ret Linie draget fra Centret til hvilketsomhelst Punkt i Cirkellinien. Alle Radier ere ligestore.
For at finde alle de Punkter, der ligge i en given Afstand fra et givet Punkt, beskrives fra dette en Cirkellinie med Radius liig den givne Afstand.
20— En Linie er convex, naar den ikke kan skjæres i flere end to Punkter af en ret Linie. 16.
En plan Figur er en paa alle Sider begrændset Plan. Efter Grændsliniernes Natur kaldes den ret-, krum- eller blandetlinet.
En retlinet Figur kaldes ogsaa Mangekant, Polygon, dens

No. Pag.

Grændslinier Siderne, og alle Siderne tilsammentagne Perimeteren.

En Cirkel er en plan Figur begrændset af en Cirkellinie, som da kaldes Peripherien.

En Figur er convex, naar dens Grændse er convex.

En Polygon kan ikke have færre end tre Sider; en saadan Figur kaldes en Triangel.

De øvrige Polygoner benævnes, almindelig, efter Sidernes Antal, ved fiirsidede, femsidede, ... Polygoner, eller Fiirkanter, Femkanter, ... (Pentagonen har 5 Sider, Hexagonen 6, 2c.)

Ved Polygoner er en indvendig Vinkel den, der dannes af to sammenstødende Sider; en udvendig Vinkel den, der dannes af en Side og den tilstødende Sides Forlængring. En indvendig Vinkel er ud- eller indgaaende, eftersom Benenes Forlængring udover Toppunktet ligger udenfor Figuren, eller gaaer igjennem samme.

I en convex Polygon ere alle Vinklerne udgaaende.

En Polygon har lige saamange indvendige Vinkler som Sider.

En Polygon er ligesidet, naar alle Siderne ere ligestore.

En Triangel er ligebenet, naar to Sider ere ligestore; uligesidet, naar alle tre Sider ere uligestore.

En Polygon er ligevinklet, naar alle Vinklerne ere ligestore.

En Triangel er ret- eller stumpvinklet, naar den har een ret eller stump Vinkel, spidsvinklet, naar de tre Vinkler ere spidse. Stump- og spidsvinklede Triangler kaldes, under eet Navn, skjævvinklede.

I en retvinklet Triangel er Hypotenusen den Side, der ligger overfor den rette Vinkel, og Catheterne de Sider, der indeslutte samme.

I en ligebenet Triangel er Basis den Side, der er ulig de to øvrige, og Toppunktet den overfor Basis liggende Vinkels Toppunkt. I enhver anden Triangel tages hvilkensomhelst Side til Basis.

En Triangels Høide er Perpendiculæren fældet fra Toppunktet ned paa Basis.

En Polygon er regulær, naar den er ligesidet og ligevinklet; irregulær, naar dette ei finder Sted.

21— To Triangler ere congruente, naar to Sider og deres indesluttede Vinkel i den ene Triangel ere liig de samme Stykker i den anden. 17.

Heraf følger: at de øvrige Stykker ere ligestore.

No. Pag.

I to congruente Triangler ligge ligestore Sider overfor ligestore Vinkler, og omvendt.

22— To Triangler ere congruente, naar een Side og dens to hosliggende Vinkler i den ene Triangel ere liig de samme Stykker i den anden.

Heraf følger: at de øvrige Stykker ere ligestore. 18.

23— I enhver Triangel er en hvilkensomhelst Side mindre end Summen af de to øvrige. 19.

24— Summen af to Linier, dragne fra et Punkt inden i en Triangel til Endepunkterne af en Side, er mindre end Summen af de to øvrige Sider.

Hvilkensomhelst convex Linie er mindre end enhver anden, af hvilken den omfattes.

25— Naar to Sider i en Triangel ere liig to Sider i en anden, men Vinklen, der indesluttes af de to første, er mindre end Vinklen, der indesluttes af de to sidste, da er den tredie Side i den første Triangel mindre end i den anden. 20.

Omvendt: overfor den mindre tredie Side ligger den mindre Vinkel.

26— To Triangler ere congruente, naar de tre Sider i den ene Triangel ere liig de samme Stykker i den anden. 21.

27— I en ligebenet Triangel ligge ligestore Vinkler overfor de ligestore Been.

En ligesidet Triangel er ligevinklet, og altsaa regulær.

En ret Linie draget, i en ligebenet Triangel, fra Toppunktet til Midten af Basis, staaer perpendiculær paa Basis, og halverer dennes modstaaende Vinkel.

28— Naar to Vinkler i en Triangel ere ligestore, da ere deres modstaaende Sider ligestore, og altsaa Trianglen ligebenet. 22.

Naar en Triangel er ligevinklet, da er den ogsaa ligesidet.

29— Naar een Vinkel i en Triangel er større end en anden, da ligger en større Side overfor den større Vinkel; og omvendt, naar een Side er større end en anden, da ligger en større Vinkel overfor den større Side.

30— Opg. At construere en Triangel, hvis tre Sider ere givne.

31— Opg. I et givet Punkt, paa en Linie, at afsætte en given Vinkel. 23.

32— Vinklers Addition, Subtraction, Multiplication.

33— Opg. At construere en Triangel, naar to Sider og deres indesluttede Vinkel ere givne. 24.

№ Pag.

34— Opg. At construere en Triangel, naar een Side og dennes to hosliggende Vinkler ere givne.

Perpendiculærer.

35— Fra et givet Punkt, udenfor en ret Linie, kan ikkun een Perpendiculær nedfældes paa denne Linie.

Fra et givet Punkt, i en ret Linie, kan ikkun een Perpendiculær opreises paa denne Linie.

To retvinklede Triangler ere congruente, naar een af de spidse Vinkler og Hypotenusen i den ene Triangel ere liig de samme Stykker i den anden.

36— Naar man fra et Punkt, udenfor en ret Linie, nedfælder en Perpendiculær paa denne Linie, og til forskjellige Punkter i samme drager rette Linier, da kunne bevises: 1° Perpendiculæren er kortere end enhver skraa Linie; 2° To skraa Linier dragne, paa modsatte Sider af Perpendiculæren, til Punkter, der ligge ligelangt fra Perpendiculæren, ere ligestore; 3° Af to skraa Linier, paa samme eller modsatte Sider af Perpendiculæren, er den længst, der viger meest ud fra denne. 25.

Perpendiculæren er Maalet for et Punkts Afstand fra en Linie.

Fra eet Punkt til een Linie kan man ikke drage tre ligestore rette Linier.

37— 1° Ethvert Punkt i Perpendiculæren, opreist paa Midten af en ret Linie, ligger ligelangt fra hvert af dennes Endepunkter; 2° ethvert Punkt udenfor Perpendiculæren ligger nærmere det ene Endepunkt end det andet. 26.

Naar en ret Linie har to Punkter, der, hvert især, ligger ligelangt fra to andre Punkter, da er den perpendiculær paa Midten af Linien, der forener de to sidste.

38— Opg. At dele en given ret Linie, ved en Perpendiculær, i to ligestore Dele. 27.

39— Opg. Fra et givet Punkt, i en given ret Linie, at opreise en Perpendiculær.

40— Opg. Fra et givet Punkt, udenfor en ret Linie, at nedfælde en Perpendiculær.

41— Opg. Fra to givne Punkter at drage to, i en given Linie sammenstødende, rette Linier, der danne ligestore Vinkler med den givne Linie.

42— Opg. Foregaaende Opgave udstrakt til en given Polygonlinie. 28.

№		Pag.
43—	To retvinklede Triangler ere congruente, naar Hypotenusen og een Cathete i den ene Triangel ere liig de samme Stykker i den anden.	29.
44—	Opg. At construere en retvinklet Triangel, naar Perimeteren og den ene Cathete ere givne.	
45—	I enhver Triangel er Summen af dens tre Vinkler = 2 R.	30.
	Naar de to Vinkler, eller deres Sum, er givet, da finder man den tredie, ved at søge Supplementet til denne Sum.	
	Naar to Triangler have to Par ligestore Vinkler, da er ogsaa det tredie Par ligestore.	
	En Triangel kan kun have een ret, eller een stump Vinkel.	
	I en retvinklet Triangel ere de to spidse Vinkler Complementer til hinanden.	
	I en ligesidet Triangel er hver Vinkel = $\frac{2}{3}$ R.	
	I en ligebenet Triangel er hver Vinkel ved Basis = R — $\frac{1}{2}$ C, naar C udtrykker den overfor Basis liggende Vinkel, og $\frac{1}{2}$ C = R — A, naar A er en Vinkel ved Basis.	
	En udvendig Vinkel er liig Summen af de to modstaaende indvendige Vinkler.	
	Summen af de tre udvendige Vinkler er = 4 R.	
	Jo mere en skraa Linie viger ud fra Perpendiculæren til en anden Linie, jo mindre Vinkel danner den med den sidste Linie.	
	Naar begge Vinklerne ved Basis ere spidse, da falder Perpendiculæren, nedfældet fra Toppunktet paa Basis, inden i Trianglen; men naar een Vinkel ved Basis er stump, da falder denne Perpendiculær udenfor Trianglen.	
	To Vinkler, hvis Been ere perpendiculære paa hinanden, ere ligestore, naar de ere eensartede; men Supplementer, naar de ere ueensartede.	
46—	Opg. Naar to Vinkler i en Triangel ere givne, da at finde den tredie.	33.
47—	Opg. At construere en Triangel, naar to Sider og den ene modstaaende Vinkel ere givne.	
48—	Opg. At construere en retvinklet Triangel, naar man har givet Hypotenusen og Summen eller Differensen af Catheterne.	34.
	To Triangler ere, i Almindelighed, congruente, naar af den ene Triangels sex Stykker, de tre, hvoriblandt i det mindste een Side, ere liig de samme Stykker i den anden.	

N° Pag.

Paralleler.

49— To rette Linier i samme Plan ere parallele, naar de ikke træffe sammen, hvorlangt de end forlængres. 35.
50— Naar to rette Linier ere perpendiculære paa en tredie, da ere de parallele.
51— Skjæres to Paralleler af en ret Linie, da kaldes denne en Secant.
De 8 Vinkler om Secanten benævnes: Ind- eller udvendige Vinkler, eftersom de ligge mellem eller udenfor Parallelerne, paa samme Side af Secanten; Ind- eller udvendige Vexelvinkler, naar de ere ind- eller udvendige Vinkler paa modsatte Sider af Secanten, og eensbeliggende Vinkler, naar den ene er indvendig, den anden udvendig, og begge ligge paa samme Side af Secanten.
52— Skjæres to rette Linier af en tredie, og Summen af to indvendige Vinkler er $= 2$ R, da ere de to første Linier parallele. 36.
53— Skjæres to rette Linier af en tredie, og Summen af to indvendige Vinkler er $<$ eller $>$ 2 R, da ville hine Linier træffe sammen.
Gjennem et givet Punkt kan ikkun een ret Linie drages parallel med en given Linie.
54— Skjæres to Paralleler af en Secant, da er Summen af to indvendige Vinkler $= 2$ R. 38.
Naar en Linie er perpendiculær paa den ene af to Paralleler, da er den ogsaa perpendiculær paa den anden.
Naar to Paralleler skjæres af en Secant, da er endvidere 1° Summen af to udvendige Vinkler $= 2$ R; 2° to indvendige Vexelvinkler ere ligestore; 3° to udvendige Vexelvinkler ere ligestore, og 4° to eensbeliggende Vinkler ere ligestore.
Omvendt: to rette Linier, der skjæres af en tredie, ere parallele, naar: 1° Summen af to udvendige Vinkler er $= 2$ R; 2° naar to indvendige Vexelvinkler ere ligestore; 3° naar to udvendige Vexelvinkler ere ligestore; 4° naar to eensbeliggende Vinkler ere ligestore.
55— Opg. Gjennem et givet Punkt at drage en ret Linie parallel med en given Linie. 39.
56— Opg. At finde Vinklen som to Linier forlængrede vilde danne med hinanden.
57— Opg. Gjennem et givet Punkt, udenfor en ret Linie, at drage en anden, der med den første danner en given Vinkel.
58— Opg. Gjennem et givet Punkt, i Aabningen af en given Vin-

No		Pag.
kel, at drage en ret Linie, der skjærer begge Benene i ligestor Afstand fra Toppunktet.	40.
59—	Naar to Linier ere, hver især, parallele med en tredie, da ere de parallele.
60—	Naar en Vinkels Been ere parallele med en andens, og Aabningerne vende til samme Side, da ere disse Vinkler ligestore. Men Supplementer naar Aabningerne vende til modsatte Sider.
61—	Naar to Paralleler skjæres af to andre, da ere de mellemliggende Stykker ligestore, og omvendt.	41.
Naar Stykkerne mellem de to Linier ere ligestore og parallele, da ere de to øvrige Stykker det ogsaa.
62—	To Paralleler ligge overalt ligelangt fra hinanden.

II. Cirkellinien
i Forbindelse med den rette Linie.

| | |
---|---|---
63— | En Cirkellinie kan ikke skjæres i flere end to Punkter af en ret Linie. | 42.
| Cirkellinien er en convex Linie, Cirklen en convex Figur. |
64— | En Secant er en ret Linie, der skjærer en Cirkellinie i to Punkter. |
| En Chorde er en ret Linie, hvis Endepunkter ligge i en Cirkellinie. |
| En Diameter er en igjennem Centret gaaende Chorde. |
| Alle Diametre i samme Cirkel ere ligestore, og dobbelt saa store som Radius. |
| Et Segment er et Cirkelstykke begrændset af en Bue og den tilsvarende Chorde. |
| En Sector er et Cirkelstykke begrændset af en Bue og de to Radier til denne Bues Endepunkter. |
65— | Diameteren er den største Chorde. |
66— | Cirkler beskrevne med samme Radius ere congruente. | 43.
67— | Naar en hvilkensomhelst Bue bringes saaledes paa en anden Bue, beskreven med samme Radius, at de have to fælleds Punkter, og ere convexe mod samme Side, da falde de overalt sammen d. v. s. de udgjøre da kun een Bue. |
| Ligestore Buer i samme Cirkel, eller i Cirkler beskrevne med samme Radius, ere congruente. |
| Til ligestore Buer i samme Cirkel, eller i Cirkler beskrevne med samme Radius, svare ligestore Chorder; og omvendt, forudsat at begge Buer ere mindre, eller begge større end den halve Peripherie. |

№ Pag.

To Segmenter i samme Cirkel, eller i Cirkler beskrevne med samme Radius, ere congruente, naar Buerne ere ligestore, eller Chorderne ere ligestore; forudsat at begge Buer ere mindre, eller begge større end den halve Peripherie.

Diameteren deler saavel Cirklen som Peripherien i to congruente Dele.

68— I een Cirkel, eller i Cirkler beskrevne med samme Radius, svarer til en større Bue en større Chorde; og omvendt, forudsat at Buerne ere mindre end den halve Peripherie. 44.

Naar Buerne ere større end den halve Peripherie findet det Omvendte Sted.

69— Opg. At finde Forholdet mellem to givne Buer i samme Cirkel, eller Cirkler beskrevne med samme Radius. 45.

Ved Hjelp af Chorderne kan man addere eller subtrahere Buer, beskrevne med samme Radius, eller multiplicere en Bue med et givet Tal.

70— En Radius, der er perpendiculær paa en Chorde, deler saavel denne som den tilsvarende Bue i to ligestore Dele. 46.

En ret Linie, der gaaer igjennem to af de tre Punkter: Centret, Chordens og Buens Midtepunkt, gaaer ogsaa igjennem det tredie, og er perpendiculær paa Chorden.

Perpendiculæren opreist paa Midten af en Chorde gaaer igjennem Centret og Midten af den tilsvarende Bue.

Af denne Construction følger en Bues Deling i 2, 4, 8...2^n ligestore Dele.

71— Gjennem tre givne Punkter, der ikke ligge i een ret Linie, kunne stedse føres en Cirkellinie, men ikkun een. 47.

To Cirkellinier kunne ikke skjære hinanden i flere end to Punkter.

72— En Polygon er indskreven i en Cirkel, naar alle Vinkelspidserne ligge i Peripherien, og altsaa alle Siderne ere Chorder. Cirklen er da omskreven. 48.

73— Opg. At beskrive en Cirkel om en given Triangel.

De tre Perpendiculærer opreiste paa Midten af en Triangels tre Sider stode sammen i Centret til den omskrevne Cirkel.

74— Opg. At beskrive en Cirkel, i hvilken to givne Linier ere Chorder, den første til en dobbelt saa stor Bue som den anden. 49.

75— Opg. At finde Centret til en given Cirkel eller given Bue.

76— To ligestore Chorder ligge ligelangt fra Centret, men af to uligestore Chorder ligger den mindste længere fra Centret end den anden.

№ Pag.

77— En Tangent er en ret Linie, der ikkun har eet Punkt tilfælleds med en Cirkellinie. Dette Punkt kaldes Berøringspunktet. 50.
En Polygon er omskreven, naar alle Siderne ere Tangenter til en Cirkel. Cirklen er da indskreven i Polygonen.
78— Perpendiculæren opreist paa Enden af en Radius er en Tangent, og omvendt: en Radius draget til Berøringspunktet er perpendiculær paa Tangenten.
Gjennem et givet Punkt i Cirkellinien kan ikkun een Tangent drages.
79— Opg. At beskrive en Cirkellinie, der skal berøre en Linie i et givet Punkt og gaae igjennem et andet givet Punkt, udenfor denne Linie. 51.
80— Naar to Paralleler skjære eller berøre en Cirkellinie, da ere de mellemliggende Buer ligestore.

Cirkelliniers indbyrdes Stilling.

81— To Cirkellinier ere concentriske, naar de have samme Centrum, eccentriske, naar de have forskjellige Centrer. Eccentriciteten er Afstanden mellem Centrerne. Centrilinien er en ret Linie, der gaaer igjennem Centrerne. 52.
To Cirkellinier berøre hinanden, naar de have kun eet Punkt tilfælleds.
82— To concentriske Cirkellinier kunne ikke have noget Punkt tilfælleds.
83— Naar to Cirkellinier have et fælleds Punkt i Centrilinien, da berøre de hinanden.
Alle de Cirkler, hvis Centrer ligge i een ret Linie og have et Punkt i denne tilfælleds, berøre hinanden i dette Punkt.
84— Naar to Cirkellinier have et fælleds Punkt udenfor Centrilinien, da skjære de hinanden. 53.
Naar to Cirkellinier berøre hinanden, da ligger Berøringspunktet i Centrilinien.
85— Naar to Cirkellinier skjære hinanden, da er Centrilinien perpendiculær paa Midten af deres fælleds Chorde, der forener Skjærepunkterne.
86— En Cirkel berører en anden indvendigen, naar Eccentriceteten er liig Radiernes Differens; de berøre hinanden udvendigen, naar Eccentriciteten er liig Radiernes Sum. 54.
Omvendt: 1º naar en Cirkel berører en anden indvendigen, da er Eccentriciteten liig Radiernes Differens; 2º naar to Cirkler be-

№ Pag.

røre hinanden udvendigen, da er Eccentriciteten liig Radiernes Sum.

En Cirkel ligger aldeles indenfor Peripherien af en anden, naar Eccentriciteten er mindre end Radiernes Differens; og omvendt.

To Cirkler ligge aldeles udenfor hinanden, naar Eccentriciteten er større end Radiernes Sum; og omvendt.

87— To Cirkler skjære hinanden, naar Eccentriciteten er større end Radiernes Differens og mindre end deres Sum; og omvendt. 55.

Naar man har to Cirklers Radier og Eccentricitet givet, da kan man ved Regning bestemme til hvilken af de fem mulige Tilfælde Cirklernes indbyrdes Stilling svarer.

88— Opg. At beskrive en Cirkellinie, der skal gaae igjennem et givet Punkt, og berøre en given Cirkellinie i et andet givet Punkt. 56.

Cirkellinien i Forbindelse med Vinkler.

89— En Centrivinkel er en Vinkel, hvis Toppunkt ligger i Centrum, og hvis Been ere Radier.

En Peripherievinkel er en Vinkel, hvis Toppunkt ligger i Peripherien, og hvis Been ere Chorder.

90— Ligestore Centrivinkler i een Cirkel, eller i Cirkler beskrevne med samme Radius, staae paa ligestore Buer; og omvendt, naar Buerne ere ligestore, da ere ogsaa Centrivinklerne ligestore. 56.

91— Naar to Centrivinkler i een Cirkel, eller i Cirkler beskrevne med samme Radius, forholde sig som to hele Tal, da forholde de sig som de tilsvarende Buer. 57.

Omvendt: naar to Buer forholde sig som to hele Tal, da forholde de sig som de tilsvarende Centrivinkler.

Heraf følger en Vinkels Deling i 2, 4, 8...2^n ligestore Dele.

92— To Vinkler forholde sig stedse som Buerne, beskrevne fra Toppunkterne som Centrer og med samme Radius. 58.

Maalet for en hvilkensomhelst Vinkel er en fra Toppunktet som Centrum beskreven Bue, hvis Endepunkter ligge i Vinklens Been.

At maale en Vinkel, eller at finde Forholdet mellem to Vinkler, skeer ved at finde Forholdet mellem to Buer. Qvadranten tages til Eenhed.

93— Maalet for en Peripherievinkel er Halvdelen af Buen den staaer paa. 60.

Omvendt: Naar en Vinkel har til Maal Halvdelen af Buen den staaer paa, da er den en Peripherievinkel.

№ Pag.

Peripherievinkler paa samme Bue ere ligestore.
Alle i samme Segment indskrevne Vinkler ere ligestore.
Enhver Vinkel indskreven i en Halvcirkel er ret, i et Segment større end en Halvcirkel spids, og i et Segment mindre end en Halvcirkel stump.
94— Maalet for en Vinkel, dannet af en Tangent og en Chorde, er Halvdelen af den til Chorden svarende Bue. 62.
95— Maalet for en Vinkel, dannet af en Chorde og Forlængringen af en anden Chorde, er Halvdelen af Buen, der ligger udenfor Chordernes Vinkel.
96— Maalet for en Vinkel, hvis Toppunkt ligger mellem Peripherien og Centret, er den halve Sum af de mellem Benene og deres Forlængringer liggende Buer.
97— Maalet for en Vinkel, hvis Toppunkt ligger udenfor Cirklen, er den halve Differens af de mellemliggende Buer.
98— Opg. At opreise en Perpendiculær paa Enden af en Linie, uden at forlængre denne. 63.
99— Opg. Fra et givet Punkt at drage en Tangent til en given Cirkel. Fra et Punkt udenfor Cirklen kunne to Tangenter drages, og deres Vinkel halveres af Linien, der gaaer igjennem Sammenstødningspunktet og Centret.
100— Opg. At indskrive en Cirkel i en given Triangel. 64.
De tre Linier, der halvere en Triangels tre Vinkler, støde sammen i Centret til den indskrevne Cirkel.
101— Opg. Gjennem et givet Punkt, inden- eller udenfor Peripherien af en given Cirkel, at drage en Chorde af en given Længde.
102— Opg. Gjennem et givet Punkt, at drage en ret Linie saaledes, at det Stykke af samme, der ligger mellem to givne concentriske Cirkellinier, har en given Længde. 65.
103— Opg. Paa en given Linie at beskrive et Segment svarende til en given Vinkel.
104— Opg. At construere en Triangel, naar Basis og dens modstaaende Vinkel, samt Høiden ere givne. 66.
105— Opg. Paa en given Linie, som Basis, at construere en Triangel, hvis Toppunkt ligger i en given Cirkellinie, naar den overfor Basis liggende Vinkel er givet.
106— Opg. I samme Plan som tre givne Punkter, at bestemme et fjerde, naar to Vinkler, dannet af Linierne, der forène to af de givne Punkter med det søgte, ère givne.

№ Pag.
107— Opg. At construere en Triangel, naar Basis og dens modstaaende Vinkel, samt Radius til den indskrevne Cirkel ere givne. 67.

III. Proportionale Linier.

108— Almindelige Begreber om Størrelsers Proportion, og Betydningen af tredie, fjerde og Mellemproportionallinie. 68.
109— Naar to rette Linier skjæres af et hvilketsomhelst Antal Paralleler, dragne fra Punkter i den første Linie, der ligge ligelangt fra hinanden, da ere ogsaa Delene af den anden Linie ligestore. 69.
110— To rette Linier, der staae mellem to Paralleler, skjæres af en tredie i proportionale Dele. 70.
Heraf følger: at de to Linier forholde sig som de tilsvarende afskjaarne Stykker.
Et hvilketsomhelst Antal rette Linier, der staae mellem samme to Paralleler, skjæres af en tredie i proportionale Dele.
Naar et hvilketsomhelst Antal rette Linier, der staae mellem samme to Paralleler, skjære hinanden alle i eet Punkt, da ere Stykkerne proportionale.
111— En ret Linie, draget i en Triangel parallel med een af Siderne, deler de to øvrige Sider i proportionale Dele. 71.
De deelte Sider forholde sig som de afskjaarne Stykker.
To sammenstødende Linier deles af et hvilketsomhelst Antal Paralleler i proportionale Dele. Ere den ene Linies Dele ligestore, da ere den andens det ogsaa.
112— Naar en Linie deler to Sider i en Triangel i proportionale Dele, da er den parallel med den tredie Side. 72.
Naar to rette Linier, der staae mellem to Paralleler, skjæres af en tredie Linie i proportionale Dele, da er denne en tredie Parallel.
Naar to Linier skjære hinanden i proportionale Dele, da ere Linierne, der forene de tilsvarende Endepunkter, parallele.
113— Linien, der halverer en Vinkel i en Triangel, deler den modstaaende Side i to Dele, proportionale med Siderne der indeslutte den deelte Vinkel. 73.
114— Opg. At dele en given Linie i et bestemt Antal ligestore Dele, eller i Dele proportionale med givne Linier. 74.
115— Opg. At finde fjerde Proportionallinie til tre givne Linier.
Samme Construction giver tredie Proportionallinie til to givne Linier.

№ Pag.

116— Opg. Gjennem et givet Punkt, i en given Vinkel, at drage en Linie saaledes, at Delene, der ligge mellem det givne Punkt og Vinklens Been, ere ligestore. 75.

117— To Polygoner ere eensidede, naar deres Sider, taget parviis og i samme Orden, ere ligestore; eensvinklede, naar Vinklerne, tagne paa samme Maade, ere ligestore. De ligestore Sider eller Vinkler ere eensbeliggende.

To Polygoner ere ligedannede, naar de ere eensvinklede, og deres eensbeliggende Sider ere proportionale.

118— To eensvinklede Triangler have proportionale eensbeliggende Sider, og ere ligedannede. 76.

To Trianglers Ligedannelse følger af to Par Vinklers Ligestorhed.

En Linie, draget parallel med en Side i en Triangel, afskjærer en med denne ligedannet Triangel.

I ligedannede Triangler ligge de eensbeliggende Sider overfor ligestore Vinkler.

119— Naar to Triangler have proportionale eensbeliggende Sider, da ere de eensvinklede og ligedannede. 77.

120— Naar to Triangler have et Par ligestore Vinkler indesluttede af proportionale Sider, da ere de ligedannede.

121— Naar de eensbeliggende Sider i to Triangler ere parallele, eller perpendiculære paa hinanden, da ere disse Triangler ligedannede. 78.

De parallele eller perpendiculære Sider ligge overfor ligestore Vinkler.

122— Opg. Paa en given Linie at construere en Triangel ligedannet med en given Triangel. 79.

123— Drages i en Triangel en Linie parallel med en Side, og fra det modstaaende Toppunkt til denne Side drages Linier, da deles saavel disse som Parallelerne i proportionale Dele. 80.

124— Naar, i en Triangel, en Side er deelt i et vist Antal f. Ex. 5 ligestore Dele, og fra alle Delingspunkterne til en anden Side drages Linier parallel med den tredie Side, da ere disse Paralleler $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$... af den deelte Side. 81.

Paa denne Sætning grunder sig Constructionen af Maalestokkene.

125— Nedfældes fra den rette Vinkels Toppunkt, i en retvinklet Triangel, en Perpendiculær paa Hypotenusen, da 1° deles Triangle i to andre og med denne ligedannede Triangler; 2° hver Cathete er Mellemproportionallinien til hele Hypotenusen og det hosliggende Stykke; 3° Perpendiculæren er Mellemproportionallinien til Hypotenusens to Stykker.

N° Pag.

Catheternes Qvadrater forholde sig som de hosliggende Stykker af Hypotenusen.

Hypotenusens Qvadrat forholder sig til en Cathetes Qvadrat som hele Hypotenusen til Stykket ved denne Cathete.

Hypotenusens Qvadrat er liig Summen af Catheternes Qvadrater.

En Ordinat er en Perpendiculær nedfældet fra et Punkt i Peripherien paa en Diameter; den er Mellemproportionallinien til de to Stykker den deler Diameteren i.

Chorden, draget fra et Endepunkt af Diameteren, er Mellemproportionallinien til hele Diameteren og Stykket mellem Chorden og Ordinaten til dens andet Endepunkt.

To, fra begge Endepunkter af Diameteren dragne, og i Peripherien sammenstødende, Chorders, eller fra samme Endepunkt dragne Chorders Qvadrater forholde sig som de hosliggende Stykker af Diameteren; og Diameterens Qvadrat forholder sig til en af disse Chorders Qvadrater, som hele Diameteren til Stykket ved denne Chorde.

126— Opg. At finde Mellemproportionallinien til to givne Linier. 85.

127} 128} — Eftersom en Winkel i en Triangel er spids eller stump, er den modstaaende Sides Qvadrat mindre eller større end Summen af de to øvrige Siders Qvadrater, og, naar man nedfælder en Perpendiculær fra ét Endepunkt af den første Side paa een af de øvrige, da er Differensen liig det dobbelte Product af den Side, til hvilken Perpendiculæren blev draget, og Afstanden mellem denne Perpendiculær og Toppunktet af den første Sides modstaaende Winkel. 86.

En Triangel er ret-, spids- eller stumpvinklet eftersom den første Sides Qvadrat er liig, mindre, eller større end Summen af de to øvrige Siders Qvadrater.

129— Naar, i hvilkensomhelst Triangel, drages en Linie fra Toppunktet til Midten af Basis, da er Summen af de to øvrige Siders Qvadrater liig to Gange Summen af Delingsliniens og den halve Basis's Qvadrater. 87.

130— Stykkerne af to hinanden overskjærende Chorder ere reciprokt proportionale. 88.

131— Drages fra et Punkt udenfor Cirklen to Secanter, der ende sig i den concave Deel af Peripherien, da ere de hele Secanter og de udenfor Cirklen liggende Stykker omvendt proportionale.

Almindelig: naar to sammenstødende Linier træffe Peripherien af samme Cirkel, da ere Stykkerne af den ene, der ligge mellem

№ Pag.

Sammenstødningspunktet og denne Linies to Punkter i Peripherien, reciprokt proportionale med de analoge Stykker af den anden.

132— Drages fra et Punkt udenfor Cirklen en Tangent og en Secant, da er Tangenten Mellemproportionallinien til hele Secanten og det udenfor Cirklen liggende Stykke.

133— Naar man gjennem et givet Punkt indenfor Peripherien drager en Radius og i dennes Forlængring tager et Punkt saaledes, at Radius er Mellemproportionallinien til de to Punkters Afstande fra Centret, saa have to, fra hvilketsomhelst Punkt i Peripherien til de to givne Punkter dragne rette Linier overalt samme Forhold, nemlig som de to givne Punkters Afstande fra Peripherien. 89.

134— Naar, i en Triangel, en Vinkel deles, ved en Linie, i to ligestore Dele, da er Productet af de to Sider, der indeslutte denne Vinkel, liig Productet af den modstaaende Sides to Stykker plus Qvadratet af Delingslinien. 90.

135— I en hvilkensomhelst Triangel er Productet af to Sider liig Productet af den omskrevne Cirkels Diameter og Perpendiculæren nedfældet paa den tredie Side.

136— Opg. At drage en fælleds Tangent til to givne Cirkler.

137— Opg. Gjennem to givne Punkter at beskrive en Cirkellinie, der berører en given ret Linie. 92.

138— Opg. Gjennem et givet Punkt at beskrive en Cirkellinie, der berører to givne rette Linier.

139— Opg. At beskrive en Cirkellinie, der berører to givne rette Linier og en given Cirkel. 93.

140— Opg. At finde et Punkt saaledes beliggende i en given Cirkellinie, at Chorderne, der forbinde det med to givne Punkter i samme Curve, forholde sig som m til n.

141— Opg. At drage en Secant gjennem to givne Cirkelliniers Skjærepunkt saaledes, at de to derved fremstaaende Chorder forholde sig som m til n. 94.

142— Opg. At drage en Secant gjennem to givne Cirkelliniers Skjærepunkt saaledes, at Summen eller Differensen af de to Chorder er liig en given Linie.

143— Opg. I en Triangel at indskrive en anden, der er ligedannet med en given Triangel og har en Vinkelspids i et givet Punkt. 96.

144— Opg. At dele en given Linie i yderste og mellemste Forhold. 97.

No. Pag.

IV. Polygoner.

145— Maader at dele en Polygon i Triangler. 98.
En Diagonal er en ret Linie, dragen i en Polygon fra en Vinkelspids til en anden.
146— I en Polygon, hvis Siders Antal være betegnet ved n, kunne fra een Vinkelspids drages n — 3 Diagonaler, der dele Figuren i n — 2 Triangler.
147— I en Polygon, hvis Siders Antal være betegnet ved n, er Summen af alle de indvendige Vinkler liig $(n-2) \cdot 2R$. 99.
Summen af alle Vinklerne i en Fiirkant er $=4R$, i en Femkant $=6R$, i en Sexkant $=8R$, 2c.
I en ligevinklet n-Kant er hver Vinkel $= \frac{(n-2) \cdot 2R}{n} = 2R - \frac{4}{n}R$; i Fiirkanten $=R$, i Femkanten $=\frac{6}{5}R$, i Sexkanten $=\frac{4}{3}R$, 2c.
148— Ved hvilkensomhelst Polygon er Summen af alle de udvendige Vinkler $=4R$.
149— Ikke ved enhver Polygon kan man omskrive en Cirkel.
150— I enhver indskreven Fiirkant ere de modstaaende Vinkler Supplementer til hinanden. 100.
Omvendt: naar de modstaaende Vinkler i en Fiirkant ere Supplementer til hinanden, da kan Figuren indskrives i en Cirkel.
151— I enhver indskreven Fiirkant er Productet af de to Diagonaler liig Summen af de modstaaende Siders Producter.
152— Et Trapezium er en Fiirkant, i hvilken to Sider ere parallele, men de to øvrige ikke. 101.
Et Parallelogram er en Fiirkant, i hvilken de modstaaende Sider ere parallele.
Hver Diagonal deler Parallelogrammet i to congruente Triangler.
De modstaaende Sider i et Parallelogram ere ligestore, saavelsom de modstaaende Vinkler.
Naar de modstaaende Sider i en Fiirkant ere ligestore, da er Figuren et Parallelogram.
Naar to modstaaende Sider i en Fiirkant ere ligestore og parallele, da er Figuren et Parallelogram. Ligeledes naar de modstaaende Vinkler ere ligestore.
153— Naar, i et Parallelogram, een Vinkel er skjæv, eller ret, da ere de øvrige ogsaa skjæve, eller rette. 102.

No		Pag.
154	Et Parallelogram er skjævvinklet, naar alle Vinklerne ere skjæve, retvinklet, naar de alle ere rette.	
	Et Parallelogram kaldes 1° Rhomboide, naar det er skjævvinklet, og de sammenstødende Sider ere uligestore; 2° Rhombus, naar det er skjævvinklet og ligesidet; 3° Rectangel, naar det er retvinklet, og de sammenstødende Sider ere uligestore; 4° Qvadrat, naar det er retvinklet og ligesidet. Dette er en regulær Figur.	
155	De to Diagonaler i et Parallelogram halvere hinanden.	
	I en Rhombus ere de to Diagonaler perpendiculære paa hinanden.	103.
156	De to Diagonaler i en Rectangel ere ligestore.	
	Ved enhver Rectangel kan man omskrive en Cirkel; dens Centrum er Diagonalernes Skjærepunkt.	
	De to Diagonaler i et Qvadrat ere perpendiculære Diametre i den omskrevne Cirkel, og dele Qvadratet i fire congruente Triangler.	
157	I ethvert Parallelogram er Summen af Sidernes Qvadrater liig Summen af Diagonalernes Qvadrater.	
	Forholdet mellem Siden og Diagonalen i et Qvadrat er som $1 : \sqrt{2}$, altsaa incommensurabelt.	
158	Opg. At finde nærmelsesviis Forholdet mellem Diagonalen og Siden i et Qvadrat.	104.
159	Naar to Polygoner ere eensvinklede og eenssidede, da ere de congruente.	106.
	For at construere en Polygon af n Sider, altsaa n Vinkler, er det tilstrækkeligt af disse 2n Stykker at kjende 2n — 3.	
	I to congruente Polygoner ere de eensbeliggende Diagonaler ligestore, og de eensbeliggende Triangler congruente.	
160	To Polygoner ere congruente, naar de ere sammensatte af samme Antal eensbeliggende congruente Triangler.	107.
	Naar Polygonen har n Sider, da er den bestemt, naar man, i de n — 2 Triangler, kjender 2n — 3 Stykker.	
161	En Polygon af n Sider er ogsaa bestemt ved alle de n — 2 Triangler, der fremstaae, naar Endepunkterne af en Side forbindes med alle de øvrige Vinkelspidser: denne Bestemmelse er afhængig af 2n — 3 givne Stykker.	
162	Opg. At construere et Parallelogram, naar to sammenstødende Sider og deres indesluttede Vinkel ere givne.	108.
163	To ligedannede Polygoner ere sammensatte af samme Antal	

No. Pag.

eensbeliggende ligedannede Triangler; og omvendt, naar to Polygoner ere sammensatte af samme Antal eensbeliggende ligedannede Triangler, da ere de ligedannede.

Deles to Polygoner af Diagonalerne, dragne fra et Par eensbeliggende Vinkelspidser i samme Antal eensbeliggende ligedannede Triangler, saa deles disse Polygoner ogsaa af Diagonalerne, dragne fra et andet Par eensbeliggende Vinkelspidser, i samme Antal eensbeliggende ligedannede Triangler.

I to ligedannede Polygoner ere to hvilkesomhelst eensbeliggende Diagonaler proportionale med to hvilkesomhelst eensbeliggende Sider.

164— To ligedannede Polygoner deles af Diagonalerne, dragne fra Endepunkterne af et Par eensbeliggende Sider, i samme Antal eensbeliggende ligedannede Triangler. 110.

165— Drages fra hvilketsomhelst Punkt rette Linier til Vinkelspidserne i en given Polygon, og paa disse Linier tages Længder proportionale med Afstandene mellem det givne Punkt og Vinkelspidserne, da haves Vinkelspidserne til en Polygon ligedannet med den givne. 111.

166— Opg. Paa en given Linie at construere en Polygon ligedannet med en given Polygon.

167— Naar, i to ligedannede Polygoner, to rette Linier ere eensbeliggende, da ere disse Linier proportionale med de eensbeliggende Sider.

168— To ligedannede Polygoners Perimetre forholde sig som et Par eensbeliggende Sider. 112.

Perimetrene forholde sig ogsaa som de eensbeliggende Diagonaler.

Regulære Polygoner.

169— Regulære Polygoner af samme Antal Sider ere ligedannede Figurer. Deres Perimetre forholde sig som et Par eensbeliggende Sider. 113.

Ved en regulær Polygon bestemmes en indvendig Vinkel af Sidernes Antal.

170— Ved enhver regulær Polygon kan man omskrive og indskrive en Cirkel.

I en regulær Polygon, hvis Siders Antal være n, er hver Centrivinkel $= \frac{4R}{n}$; i den indskrevne ligesidede Triangel $= \frac{4}{3} R$, i Qvadratet $= R$, i Femkanten $= \frac{4}{5} R$, i Sexkanten $= \frac{2}{3} R$, rc.

No. Pag.

For at indskrive en regulær n-Kant deles Peripherien i n ligestore Dele.

Den omskrevne og den indskrevne Cirkels Radius kaldes Polygonens største og mindste Radius.

171— Opg. I en given Cirkel at indskrive et Qvadrat. 115.

Det indskrivne Qvadrats Side forholder sig til Radius som $\sqrt{2}:1$.

172— Opg. I en given Cirkel at indskrive en regulær Sexkant og en ligesidet Triangel.

173— Opg. I en given Cirkel at indskrive en regulær Tikant, Femkant og Femtenkant. 116.

Af disse Constructioner følger Indskrivning af Polygoner af 8, 16, ... 2^n Sider, af 12, 24, ... 3×2^n Sider, af 20, 40, ... 5×2^n Sider, af 30, 60, ... $3\times 5\times 2^n$ Sider.

174— Opg. Man har givet en indskreven regulær Polygon, og der forlanges, ved samme Cirkel, at omskrive en lignende Polygon. 117.

Omvendt: naar en omskreven regulær Polygon er givet, da at indskrive en lignende.

175— Ved regulære Polygoner af samme Antal Sider forholde Perimetrene sig som Radierne af de omskrevne eller indskrevne Cirkler. 118.

Perimetrene forholde sig ogsaa som Diametrene af samme Cirkler.

176— Ved to concentriske Cirkler kan man stedse i den Større indskrive, og om den Mindre omskrive en regulær Polygon, hvis Sider ikke træffe Peripherien af den anden Cirkel, saa at, i det ene eller andet Tilfælde, den beskrevne Polygons Sider ere indesluttede mellem begge Peripherierne. 119.

177— Ved Cirkler forholde Peripherierne sig som Radierne eller Diametrene.

Ligedannede Buer forholde sig som Radierne.

Forholdet af Peripherien til Diameteren er constant. Dette constante Tal, der betegnes ved π, udtrykker Peripherien af en Cirkel, hvis Diameter $= 1$, eller den halve Peripherie, naar Radius $= 1$.

178— Opg. En regulær Polygons største og mindste Radius ere givne, og der forlanges at finde største og mindste Radius til en regulær Polygon af samme Perimeter og det dobbelte Antal Sider. 121.

179— Opg. At finde en Cirkel, hvis Peripherie afviger saalidet som man vil fra Perimeteren af en given regulær Polygon. 122.

N° Pag.

Ved Regning nærmelsesviis at finde Forholdet af Peripherien til Diameteren.

II. Figurers Fladeindhold.

180— En Figurs Fladeindhold udtrykkes ved et Tal, der angiver hvor mange Gange Flade-Eenheden, Maalet, indeholdes i denne Figur. At finde dette Tal er at udmaale Figuren. 127.

181— Ved et Parallelogram tages hvilkensomhelst Side, ved et Trapezium een af de parallele Sider til Grundlinie; og Høiden er en Perpendiculær mellem Grundlinien og den modstaaende Side.

182— Parallelogrammer med ligestore Grundlinier og ligestore Høider ere ligestore.

Et hvilketsomhelst Parallelogram er ligestort med en Rectangel af samme Grundlinie og Høide.

183— En hvilkensomhelst Triangel er halv saa stor som et Parallelogram af samme Grundlinie og Høide. 128.

En Triangel er halv saa stor som en Rectangel af samme Grundlinie og Høide.

Triangler med ligestore Grundlinier og ligestore Høider ere ligestore.

184— To Rectangler med ligestore Grundlinier forholde sig som deres Høider.

185— To hvilkesomhelst Rectangler forholde sig som Producterne af Grundlinie og Høide. 129.

Fladeindholdet af en Rectangel er liig Productet af Grundlinien og Høiden, eller Productet af to sammenstødende Sider; Fladeindholdet af et Qvadrat liig anden Potens af Siden.

186— Et hvilketsomhelst Parallelograms Fladeindhold er liig Productet af Grundlinien og Høiden. 131.

Parallelogrammer paa ligestore Grundlinier forholde sig som Høiderne; og Parallelogrammer med ligestore Høider forholde sig som Grundlinierne.

187— En Triangels Fladeindhold er liig det halve Product af Grundlinien og Høiden.

To Triangler med ligestore Grundlinier forholde sig som Høiderne, og to Triangler med ligestore Høider forholde sig som Grundlinierne.

№. Pag.
188— To Triangler, der have et Par ligestore Vinkler, forholde sig som Rectanglerne af Siderne, der indeslutte disse Vinkler. 132.
189— Opg. At dele et Parallelogram eller en Triangel i to Dele, der forholde sig som m:n.
190— Opg. At dele en Triangel i tre ligestore Dele ved Linier, der støde sammen i et givet Punkt i een af Siderne. 133.
191— Fladeindholdet af et Trapezium er liig Productet af Høiden og den halve Sum af de parallele Sider, eller Productet af Høiden og Linien der forener de ikke parallele Siders Midtepunkter. 134.
192— En hvilkensomhelst Polygons Fladeindhold findes ved at dele samme i Triangler.
193— En Figur forvandles, naar man danner en anden af en opgiven Form, der har samme Fladeindhold. En Figur qvadreres, naar den forvandles til et Qvadrat.
194— Opg. At qvadrere et givet Parallelogram, eller en given Triangel.
195— Opg. At forvandle et givet Qvadrat til en Rectangel, i hvilken to sammenstødende Sider have en given Sum. 135.
196— Opg. At forvandle et givet Qvadrat til en Rectangel, i hvilken to sammenstødende Sider have en given Differens. 136.
197— Opg. At forvandle en given Rectangel til en anden Rectangel med en given Side.
198— Opg. At finde to Linier, der forholde sig som Rectanglen af to givne Linier til Rectanglen af to andre givne Linier.
199— Opg. At finde to Linier, der forholde sig som Productet af tre givne Linier til Productet af tre andre givne Linier. 137.
200— Opg. At forvandle en given Polygon til en Triangel.
201— Naar en Linie er deelt i to Dele, da er Qvadratet paa hele Linien liig Qvadratet paa den ene Deel, plus Qvadratet paa den anden Deel, plus to Gange Rectanglen af begge Delene. 138.
202— Qvadratet paa en Linie, som er Differensen mellem to givne Linier, er liig Summen af disse to Liniers Qvadrater minus to Gange Rectanglen af samme Linier.
203— Rectanglen af to Liniers Sum og Differens er liig Differensen af disse to Liniers Qvadrater. 139.
204— Qvadratet construeert paa Hypotenusen af en retvinklet Triangel er liig Summen af Qvadraterne construeerte paa Cathetrne.
Qvadratet paa den ene Cathete er liig Differensen af Qvadraterne paa Hypotenusen og den anden Cathete.

No		Pag.
	Qvadratet paa Diagonalen i et Qvadrat er dobbelt saa stor som det givne Qvadrat.	
	Qvadratet paa Hypotenusen forholder sig til Qvadratet paa en Cathete, som hele Hypotenusen til Stykket, der ligger mellem denne Cathete og Perpendiculæren fældet fra Toppunktet ned paa Hypotenusen.	
	Qvadraterne paa Catheterne forholde sig som de hosliggende Stykker af Hypotenusen.	
205—	Opg. At construere et Qvadrat liig Summen eller Differensen af to givne Qvadrater.	141.
206—	Opg. At construere et Qvadrat, der forholder sig til et givet Qvadrat, som en given Linie til en anden given Linie.	142.
207—	Ligedannede Polygoners Fladeindhold forholde sig som Qvadraterne af et Par eensbeliggende Sider.	
	Regulære Polygoner af samme Antal Sider forholde sig som Qvadraterne af de eensbeliggende Sider, eller som Qvadraterne af Radierne til de omskrevne eller indskrevne Cirkler.	
208—	Opg. Der er givet to ligedannede Figurer, og der forlanges en Figur ligedannet med de givne og ligestor med deres Sum eller Differens.	144.
209—	Opg. At construere en Figur ligedannet med en given Figur, og som forholder sig til denne som m : n.	
210—	Opg. At construere en Figur ligedannet med en given Figur, og ligestor med en anden given Figur.	
211—	En regulær Polygons Fladeindhold er liig Productet af Perimeteren og den halve Radius til den indskrevne Cirkel [det halve Product af dens Perimeter og mindste Radius].	145.
212—	En Cirkels Fladeindhold er liig Productet af dens Peripherie og halve Radius.	
	En Cirkels Fladeindhold er liig Productet af dens Radius's Qvadrat og det constante Tal π, der udtrykker Forholdet af Peripherien til Diameteren, eller Længden af Peripherien, naar Diameteren = 1.	
	Cirklers Fladeindhold forholde sig som Radiernes Qvadrater.	
213—	To Sectorer, i samme eller ligestore Cirkler, forholde sig som de tilsvarende Buer.	147.
	En Sectors Fladeindhold er liig Productet af dens Bue og den halve Radius.	
	Et Segment er liig en Sector minus eller plus en Triangel, begrændset af Chorden og de til dennes Endepunkter dragne Radier.	

N: Pag.

Stereometrie.

I. Planer og rette Linier.

214— Ligger en Deel af en ret Linie i en Plan, saa ligger hele Linien deri. 149.

215— To hinanden overskjærende rette Linier ligge i een Plan, og bestemme denne Plans Beliggenhed.

En Triangel, eller tre Punkter, der ikke ligge i een ret Linie, bestemme en Plans Beliggenhed.

To Paralleler bestemme en Plans Beliggenhed.

216— Naar to Planer skjære hinanden, da er det efter en ret Linie. 150.

217— Naar en ret Linie, der træffer en Plan, er perpendiculær paa to Linier, dragne i denne Plan gjennem Sammenstødningspunktet, saa er den perpendiculær paa enhver ret Linie draget gjennem dette Punkt i Planen.

Hiin Linie er perpendiculær paa denne Plan, og omvendt.

218— Naar fra eet Punkt i en ret Linie udgaae tre Perpendiculærer, da ligge disse i een Plan, perpendiculær paa den første Linie. 151.

219— Gjennem eet Punkt, i eller udenfor en Plan, kan man kun drage een ret Linie perpendiculær paa denne Plan; gjennem eet Punkt, i en ret Linie, kun lægge een Plan perpendiculær paa denne Linie.

220— Af rette Linier som kunne drages fra et Punkt til en Plan er 1° Perpendiculæren den korteste; 2° de skraa Linier, der vige ligemeget ud fra Perpendiculæren, ere ligestore; 3° af to skraa Linier er den længst, der viger meest ud fra Perpendiculæren. 152.

Et Punkts Afstand fra en Plan udmaales ved en Perpendiculær.

221— Naar en Linie er perpendiculær paa en Plan, og fra Sammenstødningspunktet fældes en Perpendiculær paa en given Linie i denne Plan, da er Linien, der forener de to sidste Liniers Skjærepunkt med et Punkt i den første Linie, perpendiculær paa den givne Linie. 153.

222— Naar to rette Linier ere parallele, og den ene perpendiculær paa en Plan, da er ogsaa den anden perpendiculær paa denne Plan.

Naar to rette Linier ere perpendiculære paa samme Plan, da ere de parallele.

To Linier, hver især parallel med en tredie, ere indbyrdes parallele.

223— Naar en ret Linie er parallel med en Linie i en Plan, da kan den ikke træffe sammen med denne Plan. 154.

No Pag.

Hiin Linie er parallel med denne Plan, og omvendt.
Samme Linie er parallel med enhver ret Linie draget i Planen parallel med den anden Linie.
Naar to rette Linier hverken ere parallele eller skjære hinanden, da kunde gjennem den ene lægges en Plan parallel med den anden.
224— To Planer, perpendiculære paa samme rette Linie, kunne ikke træffe sammen. Disse to Planer ere parallele.
225— Naar to parallele Planer skjæres af en tredie Plan, da ere Overskjæringslinierne parallele. 155.
226— Naar en Linie er perpendiculær paa den ene af to parallele Planer, da er den og perpendiculær paa den anden.
227— Paralleler mellem to parallele Planer ere ligestore.
To parallele Planer have overalt samme Afstand.
228— Naar ved to Vinkler, i forskjellige Planer, den enes Been ere parallele med den andens Been, og Aabningerne vende til samme Side, da ere disse Vinkler ligestore, og Planerne, hvori de ligge, parallelle.
Naar to parallele Planer skjæres af to Planer, saa danne Overskjæringslinierne ligestore Vinkler.
229— Naar tre rette Linier, der ikke ligge i een Plan, ere ligestore og parallele, da ere Trianglerne, som dannes ved at forene disse Liniers tilsvarende Endepunkter, congruente og deres Planer parallele. 156.
230— To rette Linier mellem to parallele Planer, skjæres af en tredie i proportionale Dele. 157.

Toplansvinkler.

231— To, efter en Linie, sammenstødende Planer danne en Toplansvinkel; de to Planer ere Siderne, og hiin Linie Kanten.
232— To Toplansvinkler forholde sig som de plane Vinkler, der fremkomme ved Sidernes Overskjæring af Planer, perpendiculære paa deres Kanter.
Maalet for en Toplansvinkel er en plan Vinkel, dannet af to, fra samme Punkt i Kanten opreiste, Perpendiculærer, een i hver Plan. Naar den plane Vinkel er ret, da er Toplansvinklen ret og Planerne perpendiculære paa hinanden.
Ved Toplansvinkler har man samme Sætninger som ved plane Vinkler; ligeledes ved to parallele Planer skjaarne af en tredie Plan, som ved to parallele Linier skjaarne af en tredie Linie.

N°. Pag.
233— Naar en Linie er perpendiculær paa en Plan, da er enhver Plan lagt gjennem denne Linie perpendiculær paa den første Plan. 159.
Naar tre i eet Punkt sammenstødende Linier ere perpendiculære paa hinanden, da er hver især perpendiculær paa Planen bestemt ved de to øvrige, og de tre Planer perpendiculære paa hinanden.
234— Naar to Planer ere perpendiculære paa hinanden, og i den ene Plan er draget, perpendiculær paa Overskjæringslinien, en Linie, da er denne Linie perpendiculær paa den anden Plan.
Naar fra et Punkt i to paa hinanden perpendiculære Planers Overskjæringslinie er opreist en Perpendiculær paa den ene Plan, da ligger denne Perpendiculær i den anden Plan.
235— Naar to Planer ere perpendiculære paa en tredie, da er deres Overskjæringslinie perpendiculær paa den tredie Plan. 160.
236— Den korteste Afstand mellem to Linier, der hverken skjære hinanden eller ere parallele, er en ret Linie perpendiculær paa dem begge.

Fleerplansvinkler.

237— Naar flere Planer skjære hinanden to og to, og alle Overskjæringslinierne støde sammen i eet Punkt, da danne disse Planer en Fleerplansvinkel eller Legemsvinkel. Disse Planer ere Fleerplansvinklens Sider, Overskjæringslinierne dens Kanter, og disses Sammenstødningspunkt dens Spids. Efter Planernes Antal kaldes den en Treplansvinkel, Fiirplansvinkel, 2c.
238— Ved enhver Treplansvinkel er Summen af hvilkensomhelst to af de plane Vinkler større end den tredie. 161.
239— Ved enhver Fleerplansvinkel er Summen af alle de plane Vinkler mindre end 4 R.
Man antager at Fleerplansvinklen er convex.
240— Naar ved to Treplansvinkler de tre plane Vinkler ere stykkeviis ligestore, da danne de ligestore Vinklers Planer ligestore Toplansvinkler. 162.
Naar de ligestore plane Vinkler ere eensbeliggende d. e. anbragte i samme Orden, da ere Treplansvinklerne congruente; men ere de ligestore plane Vinkler anbragte i omvendt Orden, da ere Treplansvinklerne symetriske.
241— Opg. Ved en Treplansvinkel, hvis tre plane Vinkler ere givne, at finde een af Toplansvinklerne, ved Construction i een Plan. 164.

№ Pag.

242— Opg. Ved en Treplansvinkel at finde een af de plane Vinkler, naar de to øvrige og den af deres Planer dannede Toplansvinkel ere givne. 166.

Foruden alle de plane Vinkler udfordres til en Fiirplansvinkels Bestemmelse een Toplansvinkel, ved en Femplansvinkel to Toplansvinkler, ved en Sexplansvinkel tre Toplansvinkler o. s. fr.

II. Polyedre.

Congruents — Symetrie — Ligedannelse.

243— Et Polyeder er et Legem begrændset af Planer. Disse Planers Grændslinier ere Polyedrets Kanter, disses Sammenstødningspunkter dets Spidser; de af Kanterne dannede plane Figurer dets Sider, og alle Siderne tilsammen dets Overflade. Naar en ret Linie, der forbinder to Spidser, ikke er en Kant, da kaldes den Diagonal. 168.

Et Polyeder benævnes almindeligen efter Sidernes Antal.

Et Polyeder er regulær, naar alle Siderne ere regulære Polygoner, og disse ere congruente, saavelsom alle Fleerplansvinklerne.

Der forudsættes stedse at Polyedret er convex, d. v. s. at dets Overflade kan kun skjæres i to Punkter af en ret Linie.

244— En Pyramide er et Polyeder begrændset af Triangler, der alle have samme Toppunkt, og af en retlinet plan Figur, hvis Sider ere disse Trianglers Grundlinier. Denne Figur er Pyramidens Grundflade; Trianglernes fælleds Toppunkt Pyramidens Spids; og en Perpendiculær, nedfældet fra Spidsen paa Grundfladens Plan, Pyramidens Høide.

En Pyramide er regulær, naar Grundfladen er en regulær Polygon, hvis Centrum træffes af Høiden, som da kaldes Axen.

En Pyramide benævnes efter de om Spidsen liggende Siders Antal.

245— To tresidede Pyramider ere congruente, naar ved en Treplansvinkel i hver af dem: 1° de tre Sider ere stykkeviis congruente og eensbeliggende, eller 2° naar de to Sider ere stykkeviis congruente, eensbeliggende, og danne ligestore Toplansvinkler. 169.

De eensbeliggende Kanter ere ligestore; og omvendt, naar de eensbeliggende Kanter ere ligestore, da ere de to tresidede Pyramider congruente.

No. Pag.

Et Punkts Beliggenhed i Rummet er bestemt ved dets Afstande fra tre givne Punkter, der ikke ligge i een ret Linie.

246— Naar to Polyedre have alle Spidser tilfælleds, da dække de hinanden. 170.

Naar et Polyeder har n Spidser og dets Grundflade er en Triangel, da er Polyedret bestemt ved 3 n — 6 givne Linier.

247— To Polyedre ere symetriske, naar de ere construeerte paa samme Grundflade, til modsatte Sider af denne Plan, saaledes at de tilsvarende Spidser ligge ligelangt fra denne Plan, i een Perpendiculær paa samme. 171.

248— I to symetriske Polyedre ere de tilsvarende Sider congruente, og to sammenstødende Sider i det ene Legem danne samme Toplansvinkel, som de tilsvarende Sider i det andet.

Fleerplansvinklerne i det ene Polyeder ere symetriske med Fleerplansvinklerne i det andet.

Ikke to forskjellige Polyedre kunne være symetriske med eet og samme Polyeder.

249— Naar en Pyramide skjæres af en Plan parallel med Grundfladen da 1° deles Kanterne og Høiden i proportionale Dele; 2° er Snittet en Polygon ligedannet med Grundfladen, og disse to Polygoner forholde sig som Qvadraterne af deres Afstande fra Pyramidens Spids. 174.

Ved Pyramider af samme Høide forholde sig Snittene, i samme Afstand fra Spidsen, som Grundfladerne.

250— To tresidede Pyramider ere ligedannede, naar to af deres Sider ere stykkeviis ligedannede, eensbeliggende, og danne ligestore Toplansvinkler. 175.

To Polyedre ere ligedannede, naar de have ligedannede Grundflader, og de eensbeliggende Spidser, udenfor disse Grundflader, ere bestemte ved stykkeviis ligedannede og eensbeliggende tresidede Pyramider.

251— Ved to ligedannede Pyramider ere de eensbeliggende Sider ligedannede, og de eensbeliggende Fleerplansvinkler congruente. 175.

De eensbeliggende Kanter ere proportionale.

To hvilkesomhelst Sider i den ene Pyramide danne samme Toplansvinkel, som de to tilsvarende Sider i den anden Pyramide.

Naar en tresidet, og almindelig, naar en hvilkensomhelst Pyramide skjæres af en Plan parallel med Grundfladen, da afskjæres en Pyramide ligedannet med den hele Pyramide.

No Pag.

To tresidede Pyramider ere ligedannede, naar deres eensbeliggende Kanter ere proportionale.

252— Ved to ligedannede Polyedre ere de eensbeliggende Kanter og Diagonaler proportionale, de eensbeliggende Sider ligedannede, og de eensbeliggende Fleerplansvinkler congruente. 177.

Fire Spidser af det ene Polyeder bestemme en tresidet Pyramide, ligedannet med Pyramiden bestemt ved de fire tilsvarende Spidser af det andet Polyeder.

253— To ligedannede Polyedre kunne deles i samme Antal stykkeviis ligedannede og eensbeliggende tresidede Pyramider. 179.

254— Et Prisme er et Polyeder med to parallele congruente Sider, forbundne ved Parallelogrammer. De parallele Sider kaldes Grundfladerne, og en Perpendiculær mellem samme Høiden.

Et Prisme er tresidet, fiirsidet, ... eftersom Grundfladen er en Triangel, Fiirkant, ...

Et Prisme er retstaaende eller skjævtstaaende, eftersom de mellem Grundfladerne staaende Kanter ere perpendiculære paa samme, eller ikke.

Et Parallelepiped er et Prisme, hvis Grundflader ere Parallelogrammer.

255— To Prismer ere congruente, naar de tre Sider af et Par Treplansvinkler ere stykkeviis congruente og eensbeliggende. 181.

To retstaaende Prismer med congruente Grundflader og ligestore Høider ere congruente.

256— Naar et hvilketsomhelst Prisme skjæres af parallele Planer, da ere Snittene congruente Polygoner. 182.

Naar et Snit er parallel med Grundfladen, da er det congruent med samme.

257— I ethvert Parallelepiped ere de modstaaende Sider congruente og parallele.

To hvilkesomhelst modstaaende Sider kunne betragtes som Parallelepipedets Grundflader.

Et Parallelepiped er bestemt ved en Treplansvinkels tre Kanter og tre plane Vinkler.

258— Ved ethvert Parallelepiped ere de modstaaende Treplansvinkler symetriske, og Diagonalerne, der forene disse Vinklers Spidser, halvere hinanden. 183.

259— En Plan lagt gjennem to modstaaende parallele Kanter deler Parallelepipedet i to symetriske tresidede Prismer.

No. Pag.

260— Et Parallelepiped er retvinklet, naar alle Siderne ere Rectangler. — Naar de tre Kanter af en Treplansvinkel ere ligestore, da ere alle sex Sider ligestore Qvadrater, og Legemet kaldes da en Cubus.

Udmaaling af Polyedres Overflade.

261— En regulær Pyramides Overflade er liig Productet af Grundfladens Perimeter og den halve Sum af dens mindste Radius og Perpendiculæren fældet fra Spidsen ned paa een af dens Sider.
Ved et retstaaende Prisme er Fladeindholdet af de mellem Grundfladerne staaende Sider liig Productet af Høiden og Grundfladens Perimeter.

262— Ligedannede Polyedres Overflader forholde sig som Qvadraterne af deres eensbeliggende Kanter eller Diagonaler. 185.

Polyedres Cubikindhold.

263— Et Legem sammenlignes, med Hensyn til Indhold, almindeligen med en Cubus, taget til Eenhed. Productet af det fundne Tal og denne Eenhed udtrykker Legemets Cubikindhold. 186.

264— De to symetriske tresidede Prismer, i hvilke et Parallelepiped deles ved et Diagonalsnit, ere ligestore.
Ethvert tresidet Prisme er Halvdelen af et Parallelepiped, med hvilket det har en Treplansvinkel og dennes tre Kanter tilfælleds.

265— Naar to Parallelepipeder have en fælleds Grundflade, og deres øverste Grundflader i een Plan mellem samme Paralleler, da ere de ligestore. 187.

266— To Parallelepipeder paa samme Grundflade og med samme Høide ere ligestore. 188.

267— Ethvert Parallelepiped kan forvandles til et retvinklet Parallelepiped af samme Høide, og med en Grundflade af samme Indhold.

268— To retvinklede Parallelepipeder paa samme Grundflade forholde sig som Høiderne. 189.

269— To retvinklede Parallelepipeder af samme Høide forholde sig som Grundfladerne. 190.

270— To hvilkesomhelst retvinklede Parallelepipeder forholde sig som Producterne af Grundflade og Høide, eller som Producterne af deres tre Dimensioner ɔ: tre Kanter som danne en Treplansvinkel.

No. Pag.

Et hvilketsomhelst retvinklet Parallelepipeds Cubikindhold er liig Productet af Grundfladen og Høiden, eller Productet af Parallelepipedets tre Dimensioner.

En Cubus's Cubikindhold er liig tredie Potens af Kanten.

271— Et Parallelepipeds, og, almindeligere, et hvilketsomhelst Prismes Cubikindhold er liig Productet af Grundfladen og Høiden. 192.

To hvilkesomhelst Prismer forholde sig som Producterne af Grundflade og Høide.

To Prismer af samme Høide forholde sig som Grundfladerne.

To Prismer med ligestore Grundflader forholde sig som Høiderne.

272— To tresidede Pyramider paa ligestore Grundflader og med ligestore Høider ere ligestore. 193.

273— Enhver tresidet Pyramide er en Trediedeel af et tresidet Prisme paa samme Grundflade og af samme Høide. 194.

En tresidet Pyramides Cubikindhold er liig en Trediedeel af Productet af Grundfladen og Høiden.

274— En hvilkensomhelst Pyramides Cubikindhold er liig en Trediedeel af Productet af Grundfladen og Høiden. 195.

Enhver Pyramide er en Trediedeel af et Prisme paa samme Grundflade og af samme Høide.

To Pyramider med ligestore Høider forholde sig som Grundfladerne, og to Pyramider med ligestore Grundflader forholde sig som Høiderne.

Man finder Cubikindholdet af et hvilketsomhelst Polyeder ved at dele det i Pyramider.

275— To symetriske Polyedre ere ligestore.

276— En afkortet Pyramide med parallele Grundflader er liig Summen af tre Pyramider, hvilke, af samme Høide som den, staae paa dens Grundflader og en Mellemproportionalflade til disse to. 196.

277— Et skraatafskjaaren tresidet Prisme er liig Summen af tre Pyramider, der staae paa samme Grundflade og have Spidserne i den modstaaende Sides tre Vinkelspidser. 197.

Naar de paa Grundfladen = G staaende tre Kanter A, B, C, ere perpendiculære paa samme, da er Legemets Cubikindhold $= \frac{1}{3}G(A+B+C)$.

278— Naar to tresidede Pyramider have en fælleds Treplansvinkel, da forholde de sig som Producterne af denne Vinkels tre Kanter. 198.

Samme Sætning ved to tresidede Prismer, eller to Parallelepipeder.

No. Pag.

279— To ligedannede Pyramider forholde sig som Cubuserne af deres eensbeliggende Kanter, eller som Cubuserne af deres Høider. 199.

280— To hvilkesomhelst ligedannede Polyedre forholde sig som Cubuserne af deres eensbeliggende Kanter. 200.

281— Ved et Prisme, hvis Grundflade = G og Høide = H, er Cubikindholdet = G×H.

Ved en Pyramide, hvis Grundflade = G og Høide = H, er Cubikindholdet = $G \times \frac{1}{3} H = \frac{1}{3} G \times H$.

Ved en parallel afkortet Pyramide, hvis Grundflader = G og = g, og Høide = H, er Cubikindholdet = $\frac{1}{3} H (G + g + \sqrt{G \times g})$.

III. Cylindren — Keglen — Kuglen.

282— Et ved en Rectangels Omdreining, om sin ene fastliggende Side, beskrevet Legem kaldes en Cylinder. Omdreiningslinien er Cylindrens Axe; den dermed parallele Side Cylindrens Sidelinie; de, af de to øvrige Sider, beskrevne Cirkelflader Cylindrens Grundflader. 201.

Ethvert plant Snit parallel med Grundfladen, er en med denne congruent Cirkel; gjennem Axen derimod en Rectangel, dobbelt saa stor som det beskrivende.

Den definerede Cylinder er retstaaende, fordi Axen er perpendiculær paa Grundfladens Plan; men naar Axen har en anden Stilling mod samme, kaldes Legemet en skjævstaaende Cylinder.

En Cylinders Høide er en Perpendiculær mellem Grundfladernes Planer.

283— En Plan er mindre end enhver anden Flade med samme Contour. 202.

284— Enhver convex Flade er mindre end en anden hvilkensomhelst Flade, der omfatter den første og har samme Contour.

En convex Flade begrændset af to Contourer er mindre end en anden hvilkensomhelst Flade, der omfatter den første og har samme Contourer.

En convex Flade er mindre end en anden Flade, af hvilken den aldeles indesluttes. 203.

285— Naar man i Cirklen, der tjener en Cylinder til Grundflade, indskriver en Polygon, og fra alle Vinkelspidserne drager Paralleler med Axen, saa fremstaaer et Prisme, der siges at være indskreven i Cylinderen; havde Polygonen været omskreven, saa var og Prismet omskreven om Cylindren.

286— En retstaaende Cylinders krumme Flade er større end det indskrevne

No. Pag.

og mindre end det omskrevne Prismes, af Grundfladernes Contourer begrændsede, convexe Flade. 204.

287— En retstaaende Cylinders krumme Flade er liig Productet af Grundfladens Peripherie og Sidelinien. 205.

Sidelinien eller Høiden være = H, Grundfladens Radius = R, saa er Cylindrens krumme Flade = $2\pi R.H$ eller = PH, naar P udtrykker Grundfladens Peripherie, og hele Overfladen = $2\pi R (H+R) = P (H+R)$.

288— En Cylinders Cubikindhold er liig Productet af Grundfladen og Høiden ($=\pi R^2 H$).

Cylindre af samme Høide forholde sig som Grundfladerne, eller som Qvadraterne af Radierne eller Diametrene af Grundfladerne.

Cylindre med ligestore Grundflader forholde sig som Høiderne.

289— Et ved en retvinklet Triangels Omdreining, om sin ene fastliggende Cathete, beskrevet Legem kaldes en Kegle. Omdreiningslinien er Keglens Axe; den, af den anden Cathete, beskrevne Cirkel Keglens Grundflade; Hypotenusen Keglens Sidelinie; dennes Sammenstødningspunkt med Axen Keglens Spids. 206.

Plane Snit parallele med Grundfladen ere Cirkler, hvis Centrer ligge i Axen, og der forholde sig som Qvadraterne af deres Afstande fra Spidsen.

Ethvert plant Snit gjennem Axen er en ligebenet Triangel, dobbelt saa stor som den beskrivende retvinklede Triangel.

Den definerede Kegle er retstaaende, fordi Axen er perpendiculær paa Grundfladens Plan; men naar Axen har en anden Stilling mod samme, da kaldes Legemet en skjævstaaende Kegle.

En Kegles Høide er en Perpendiculær fældet fra Spidsen ned paa Grundfladens Plan.

Naar fra en Kegle, ved et Snit parallel med Grundfladen, afskjæres et Stykke mod Spidsen, da kaldes det tilbageblevne Legem en parallel afkortet Kegle. En retstaaende parallel afkortet Kegle fremstaaer ved Omdreining af et Trapezium om en Side, der er perpendiculær paa de to parallele Sider; den første er Axen, de, af de to andre, beskrevne Cirkler Grundfladerne, og den fjerde Side af Trapeziet Sidelinien.

Naar man i Cirklen, der tjener en Kegle til Grundflade indskriver en Polygon, og forener Vinkelspidserne, ved rette Linier, med Keglens Spids, da fremstaaer en Pyramide, indskreven i

№ Pag.
Keglen; havde Polygonen været omskreven, saa var og Pyramiden omskreven om Keglen.
290— En retstaaende Kegles krumme Flade er større end den indskrevne og mindre end den omskrevne Pyramides, af Grundfladens Contour begrændsede, convexe Flade. 208.
291— En retstaaende Kegles krumme Flade er liig Productet af Grundfladens Peripherie og den halve Sidelinie. 209.
Keglens Sidelinie være = S, Grundfladens Radius = R, altsaa Peripherien $P = 2\pi R$, saa er Keglens krumme Flade $= P \times \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} P . S = \pi RS$, og den hele Overflade $= \pi R (S + R)$.
292— En retstaaende parallel afkortet Kegles krumme Flade er liig Productet af Sidelinien og den halve Sum af Grundfladernes Peripherier. 210.
Denne krumme Flade er og liig Productet af Sidelinien og Peripherien af et Snit i ligestor Afstand fra begge Grundfladerne.
293— En Kegles Cubikindhold er liig en Trediedeel af Productet af Grundfladen og Høiden. 211.
Keglens Høide være = H, Grundfladens Radius = R, dennes Fladeindhold $C = \pi R^2$, saa er Keglens Cubikindhold $= \frac{1}{3} C . H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.
En Kegle er en Trediedeel af en Cylinder med samme Grundflade og samme Høide.
Kegler af samme Høide forholde sig som Grundfladerne, eller som Qvadraterne af Radierne eller Diametrene af Grundfladerne.
Kegler med ligestore Grundflader forholde sig som Høiderne.
294— Cubikindholdet af en retstaaende parallel afkortet Kegle (hvis Grundfladers Radier = R og = r, og hvis Høide = H) er $= \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr)$. 212.
295— To Cylindre eller to Kegler ere ligedannede, naar de fremstaae ved Omdreining af ligedannede Figurer. 213.
Ved ligedannede Cylindre eller Kegler forholde Grundfladernes Peripherier sig som Sidelinierne eller Høiderne, og deres Fladeindhold som Qvadraterne af disse Linier.
296— Ligedannede Cylindres Overflader forholde sig som Qvadraterne af deres Grundfladers Radier eller som Qvadraterne af deres Sidelinier, og deres Cubikindhold som Cubusserne af disse Linier.
297— Ligedannede Keglers Overflader forholde sig som Qvadraterne af deres Grundfladers Radier, eller som Qvadraterne af deres Sidelinier, og deres Cubikindhold som Cubusserne af disse Linier. 214.
298— En Kugle er et Legem begrændset af een eneste krum Flade, i

N°		Pag.
	hvilken alle Punkter ligge ligelangt fra eet Punkt, som kaldes Kuglens Centrum.	215.
	En Kugles Radius er en ret Linie, draget fra Centret til et hvilketsomhelst Punkt i Kuglens Overflade; dens Diameter, eller Axe, en gjennem Centret gaaende ret Linie, hvis Endepunkter ligge i Kuglens Overflade.	
	Alle Radier i samme Kugle ere ligestore; alle Diametre ligestore og dobbelt saa store som Radius.	
299—	Naar en Kugle skjæres af en Plan, da er Snittet en Cirkel.	216.
	Naar Snittet gaaer igjennem Kuglens Centrum, da kaldes det en Storcirkel, i ethvert andet Tilfælde en mindre Cirkel.	
	Alle Storcirkler i samme Kugle ere congruente.	
	To Storcirkler skjære hinanden i to congruente Dele.	
	Enhver Storcirkel deler Kuglen og dens Overflade i to congruente Dele.	
	En ret Linie draget gjennem Kuglens og en mindre Cirkels Centrer er perpendiculær paa denne Cirkels Plan.	
	Jo længere en mindre Cirkel ligger fra Kuglens Centrum, desto mindre er den.	
	Gjennem to givne Punkter i Kuglens Overflade kunde stedse føres en Storcirkelbue.	
300—	En Cirkels Pol er et Punkt i Kuglens Overflade, der ligger ligelangt fra alle Punkter i denne Cirkels Peripherie.	217.
301—	Endepunkterne af Diameteren, der er perpendiculær paa en Storcirkels Plan, ere Polerne til denne Storcirkel og til enhver mindre Cirkel parallel med samme.	
	Enhver Bue draget fra et Punkt i en Storcirkelbue til dens Pol er en Qvadrant.	
	En Storcirkelbues Pol er Endepunktet af en paa samme perpendiculær Storcirkelbue = en Qvadrant, eller to perpendiculære Storcirkelbuers Skjærepunkt.	
	Omvendt: naar paa en Kugles Overflade et Punkts Afstand fra hvert især af to andre er en Qvadrant, da er det første Punkt en Pol, og Buerne, der udmaale dets Afstande, perpendiculære paa Storcirkelbuen gjennem de to øvrige Punkter.	
302—	En Plan tangerer en Kugleflade, naar den kun har eet Punkt tilfælleds med samme.	219.
303—	En Plan perpendiculær paa Enden af en Radius tangerer Kuglen.	
	To Kugler berøre hinanden i Centrilinien, naar Eccentriciteten er liig Radiernes Sum eller Differens.	

№ Pag.

304— En Zone er en mellem to parallele Planer liggende Deel af en Kugleflade — Zonen har een eller to Contourer, eftersom den ene Plan tangerer Kuglen eller ikke.

Et Kuglesegment er et Kuglestykke mellem to parallele Planer — Segmentet har een eller to Grundflader, eftersom den ene Plan tangerer Kuglen eller ikke.

En Zones eller Kuglesegments Høide er Afstanden mellem de to parallele Planer.

Naar en Halvcirkel dreier sig om sin Diameter beskriver enhver Sector i samme et Legem, som kaldes en Kuglesector, og den tilsvarende Bue en Zone, som er denne Kuglesectors Grundflade.

305— Naar en Polygonlinie, der er sammensat af Sider i en regulær Polygon og ligger heelt til samme Side af en Diameter eller Axe i samme, dreier sig om denne Axe, saa beskriver den en Flade, der er liig Productet af dens Høide og Peripherien af den i Polygonen indskrevne Cirkel. 220.

Naar Polygonen har et lige Antal Sider, og Axen gaaer igjennem to modstaaende Vinkelspidser, da er den af Polygonens halve Contour beskrevne Flade liig Productet af Axen, eller den omskrevne Cirkels Diameter, og Peripherien af den indskrevne Cirkel.

306— En Kugles Overflade er liig Productet af dens Diameter og Peripherien af en Storcirkel. 221.

Kuglens Overflade er det Fiirdobbelte af Storcirklen.

Lad R være Radius, D Diameteren, P Peripherien og C Fladeindholdet af Kuglens Storcirkel, saa er Kuglens Overflade $= DP = 4C = 4\pi R^2$.

To Kuglers Overflader forholde sig som Qvadraterne af deres Radier eller Diametre.

307— En hvilkensomhelst Zones Fladeindhold er liig Productet af dens Høide og Peripherien af en Storcirkel. 222.

To Zoner, paa samme eller ligestore Kugler, forholde sig som deres Høider.

En hvilkensomhelst Zone forholder sig til hele Kuglefladen, som Zonens Høide til Kuglens Diameter.

308— Naar en Triangel og en Rectangel, med samme Grundlinie og Høide, dreie sig om deres fælleds Grundlinien, da er Legemet beskreven af Triangles en Trediedeel af Cylindren beskreven af Rectanglen. 223.

No.		Pag.
	Naar Høiden = H og Grundlinien = G, da er Cylindren = $\pi H^2 G$, og det af Trianglen beskrevne Legem = $\frac{1}{3}\pi H^2 G$.	
309—	Opg. At finde Cubikindholdet af Legemet beskreven af en Triangel, idet dens Plan dreier sig om en Linie dragen udenfor Trianglen gjennem Toppunktet.	224.
	Dette Legems Cubikindhold er liig Productet af Trianglens Fladeindhold og to Trediedeel af Peripherien beskreven af Grundliniens Midtepunkt.	
	Naar Trianglen er ligebenet, dens Høide = H, og Afstanden mellem Perpendiculærerne, fældte fra Grundliniens Endepunkter ned paa Axen, = D, da er det beskrevne Legem = $\frac{2}{3}\pi H^2 D$.	
310—	Naar i en regulær Polygon, hvis mindste Radius = R, drages Radier til to Vinkelspidser, der ligge til samme Side af en Diameter, og Polygonsectoren, begrændset af disse to Radier og de mellemliggende Sider, dreier sig om denne Diameter eller Axe, saa beskriver den et Legem = $\frac{2}{3}\pi R^2 D$, naar D er Afstanden mellem Perpendiculærerne fældte fra de to Vinkelspidser ned paa Axen.	225.
311—	Enhver Kuglesectors Cubikindhold er liig Productet af Zonen, der tjener den til Grundflade, og en Trediedeel af Kuglens Radius; den hele Kugles Cubikindhold liig Productet af dens Overflade og en Trediedeel af dens Radius.	226.
	Naar Kuglens Radius = R, Diameter = D, saa er Kuglens Cubikindhold = $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$.	
	To Kugler forholde sig som Cubusserne af deres Radier eller Diametre.	
312—	Kuglens Overflade forholder sig til den omskrevne Cylinders Overflade som 2:3. Disse to Legemers Cubikindhold staae ogsaa i dette Forhold.	227.
313—	Opg. At finde det af et Cirkelsegment, idet det dreier sig om en Diameter udenfor samme, beskrevne Legems Cubikindhold.	228.
	Dette Legems Cubikindhold er = $\frac{1}{6}\pi C^2 H$, naar C er Chorden og H Høiden.	
	Dette Legem forholder sig til Kuglen, hvis Diameter er Chorden = C, som H:C.	
314—	Cubikindholdet af et Kuglesegment med to parallele Grundflader er liig Productet af Høiden og den halve Sum af Grundfladerne, plus Cubikindholdet af en Kugle, hvis Diameter er liig Segmentets Høide.	229.
	Et Kuglesegment med een Grundflade er liig Halvdelen af Cy-	

No. Pag.

lindren med samme Grundflade og Høide, plus Kuglen, der har denne Høide til Diameter.

C og c være Grundfladerne, H Høiden, saa er Kuglesegmentes Cubikindhold $= \frac{1}{2}(C+c)H + \frac{1}{6}\pi H^3$.

Naar $c=0$, saa er Cubikindholdet af Segmentet, med een Grundflade, $= \frac{1}{2}CH + \frac{1}{6}\pi H^3$.

IV. Regulære Polyedre.

315— Ikkun fem regulære Polyedre ere mulige, nemlig Tetraedret, Octaedret, Icosaedret, Hexaedret og Dodecaedret. 231.

316— Opg. At construere et regulært Polyeder, naar en Side eller kun en Kant er givet. 232.

317— Opg. Ved et regulært Polyeder at finde den af to hosliggende Sider dannede Toplansvinkel. 235.

318— Et Polyeder er omskreven om en Kugle, naar alle Sidernes Planer tangere Kuglen. 236.

Et Polyeder er indskreven i en Kugle, naar alle Spidserne ligge i Kuglens Overflade.

319— Ved ethvert regulært Polyeder kan man indskrive og omskrive en Kugle.

Kuglens Centrum kaldes og Polyedrets Centrum; den indskrevne Kugles Radius Polyedrets mindste Radius; den omskrevne Kugles Radius Polyedrets største Radius.

320— Opg. At finde mindste og største Radius af et regulært Polyeder, hvis Kant er givet. 238.

321— Ethvert regulært Polyeder kan deles i lige saamange congruente regulære Pyramider, som Polyedret har Sider: disse Pyramiders fælleds Spids er Polyedrets Centrum.

Et regulært Polyeders Cubikindhold er liig Poductet af dets Overflade og en Trediedeel af mindste Radius.

En Kugles og et omskreven Polyeders, eller to hvilkesomhelst ved ligestore Kugler omskrevne Polyedres Cubikindhold forholde sig som deres Overflader.

To regulære Polyedre af samme Navn ere ligedannede Legemer: deres mindste eller største Radier forholde sig som deres Kanter, deres Overflader som Qvadraterne af deres Kanter, og deres Cubikindhold som Cubusserne af deres Kanter.

Supplement.

Bemærkninger over Fladers og Legemers Beregning. 241.

Numeriske Opgaver til Øvelse.

Rettelser.

Pag. 29 Lin. 3 f. n. "ACD" læs "BCD".
— 31 — 18 f. o. "a' + b' > a" læs "a' + b' = a".
— 70 — 8 f. n. "AH" læs "AE".
"hk, og" læs "hk, omførte en af disse Dele fra E mod H, og".
— 75 — 2 f. n. bør udgaae af Texten.
— 93 — 5 f. n. "Oplysninger" læs "Opløsninger".
— 126 — 8 og 9 for "R" sæt "r".
— 215 — 17 til 23 for "SA" sæt "SC," og for "Sa" sæt "Sc".
— 224 — 11 f. o. "AB" læs "BC".

Plan I Fig. 17, forlængre CB og sæt K i Forlængringen.
— III — 79, istedetfor B' sæt D'.
— VII — 203, i Linien EP's andet Endepunkt sættes D.
— IX — 246, ved Cirklen CB skal B være Berøringspunktet af Linien FG.

Geometrie.

Indledning.

1— Idet vore Sandser tilkjendegive os Tilværelsen af Naturens Gjenstande, opstaae Begreberne om Udstrækning og Form. Disse Begreber forbinde vi i Førstningen stedse med Forestillingen om de Legemer, der opvakte dem; men snart lærer Forstanden os, at skille dem derfra, at betragte dem særskilt, uafhængig af de materielle Gjenstande, af hvilke de oprindeligen fremstode.

Ere Udstrækning og Form saaledes blevne Gjenstande for vor Indbildingskraft, da tillægge vi dem en Nøiagtighed og Regularitet, som ikke findes i Naturen. Vi betragte dem uafhængig af Materiens physiske Egenskaber, og de Slutninger, som deres Betragtning lede til, kunne vi saameget rigtigere anvende paa reelle Gjenstande, jo mere disse nærme sig hine Idealer.

Have vi saaledes skilt Begrebet om Udstrækning fra enhver Forestilling om Materie, da see vi Intet, der kunne fastsætte absolute Grændser, og vor Indbildingskraft kunne derfor forestille os samme forlængret, i enhver Retning, i det Uendelige.

Isoleres en hvilkensomhelst Deel af dette uendelige Rum, da opvækker den Begrebet om Form ved den Maade, paa hvilken den begrændses. Vi kalde denne Deel et Volumen eller geometrisk *Legem*, og Grændsen for dens Udstrækning i enhver Retning, en *Flade*.

Tænke vi os en endelig Deel af en Flade, da maae den være begrændset paa en vis Maade, og denne Grændse kalde vi *Linie*.

Tage vi endelig en hvilkensomhelst Deel af en Linie, da har den sine Grændser eller Ender, som vi kalde Punkter.

Da Fladen er et Legems Grændse, saa er dens Udstrækning af en anden Natur end Legemets; og da Linien er Fladens Grændse, saa er dens Udstrækning atter af en anden Natur end Legemets og Fladens. Punktet, eller Liniens Grændse, frembyder ingen Forestilling om Udstrækning. Vi kunne altsaa, med Hensyn til Udstrækning, kun sammenligne Legemer med Legemer, Flader med Flader, og Linier med Linier. Hvad Punkter angaae da kunne de ikke betragtes fra dette Synspunkt, fordi de ikke have nogen Slags Udstrækning.

Man siger at Legemet har tre Dimensioner: Udstrækning i Længde, Bredde og Tykkelse (Høide, Dybde); Fladen to Dimensioner: Længde og Bredde, Linien een Dimension: Længde.

Altsaa har Grændsen een Dimension mindre end det Begrændsede.

De her omhandlede Størrelser: Linier, Flader og Legemer, kaldes Rumstørrelser.

Indbegrebet af alle de Love, som Betragtningen af Rumstørrelsers Storhed, Form, Stilling, lede til, samt deres Forbindelser, udgjør den Videnskab vi kalde Geometrie.

Videnskaben om Rumstørrelser gaaer enten ud fra disses Betragtning til de almindelige Love for samme, og er da Geometrie i indskrænket Betydning, eller den er en Anvendelse af Algebraen paa de Forbindelser, der fremkomme ved Linier, Flader, Legemer, og kaldes analytisk Geometrie.

Forestilling om Begrændsning ledte til Begreberne om Flader og Linier. Disse Begreber eengang opfattede, kunne vi tænke os disse Størrelser forlængrede i det Uendelige.

Forestillingen om Rumstørrelsers Fremkomst ved Bevægelse, kunne ligeledes tjene til at oplare Begrebet om deres Udstrækning Natur. Et Punkt beskriver, under dets Bevægelse, en Linie. Fastsættes ingen Begyndelse eller Ende for Bevægelsen,

da er Liniens Udstrækning uendelig. Bevæger sig, under samme Forudsætning, en uendelig Linie saaledes, at en ny Dimension fremstaaer, da beskrives en uendelig Flade, der atter, under samme Betingelser, vilde frembringe det uendelige Rum.

Forestillingen om disse uendelige Udstrækningers Fremkomst ved continuerlig Bevægelse tilkjendegiver, at Delene følge umiddelbar paa hinanden, og at denne Egenskab maae finde Sted ved enhver endelig Deel, enhver begrændset Udstrækning, under hvilkensomhelst Form. Derfor ere alle Rumstørrelser, det være sig Legemer, Flader eller Linier, sammenhængende (continuerlige) Størrelser.

Det er en Følge af Begrebet om Rumstørrelser, at her ikke tales om materielle Dele, men kun om enhver tænkelig, vilkaarlig Inddeling. Det er ogsaa indlysende at Delenes Udstrækning er af samme Natur som det Heles: at et Legems Dele ere Legemer, om vi endog tænke os Delingen fortsat i det Uendelige; men at Grændsen mellem Delene er en Flade. Ligedan er en Flades Dele selv Flader, og deres Grændser Linier; og endelig ere en Linies Dele selv Linier, og Grændserne Punkter.

2— I Geometrien, ligesom i enhver anden Videnskab, gaaer man ud fra Grundbegreber, opvakte ved Sandserne og Erfaringen. Det første Foretagende er altsaa at vælge disse elementære Begreber, dernæst at føre alle de andre tilbage paa disse, og udlede de stedfindende Forbindelser.

I. En ret Linie er den korteste Linie man kan drage fra eet Punkt til et andet.

II. En brudt Linie eller Polygonlinie, er en Linie sammensat af forskjellige rette Linier.

III. En krum Linie eller Curve, er en Linie i hvilken ingen Deel er ret.

AB er en ret Linie, ACDB en brudt Linie, og AEB en krum Linie. Fig. 1.

IV. En Flade kaldes Plan, naar en ret Linie, der forbinder to hvilkesomhelst Punkter i samme, ligger aldeles i Fladen.

V. En Flade er krum naar ingen Deel af samme er plan.

VI. Naar en krum Linie har alle sine Dele i een Plan da kaldes den en enkelt-krum, i modsat Fald en dobbelt-krum Linie.

VII. En Cirkellinie er en enkelt-krum Linie, i hvilken alle Punkter ligge ligelangt fra eet Punkt, i samme Plan som denne Curve. Dette Punkt kaldes Centrum.

Fig. 2. ACFA er en Cirkellinie, og O Centret.

3— Kun to Slags Linier: den rette Linie og Cirkellinien, afhandles i den elementære Geometrie. Denne betragter derfor kun de Rumstørrelser, der kunne construeres ved, eller staae i Forbindelse med disse to Linier.

Den elementære Geometrie deles i Planimetrien, der handler om Størrelser, som kunne construeres i een Plan, og Stereometrien, der handler om Størrelser, som ikke kunne construeres i een Plan.

4— Tænke vi os to Rumstørrelser opstaaet derved, at een og samme Størrelse først befandt sig paa et, saa paa et andet Sted i Rummet, da indsees, at disse to Rumstørrelser ere i alle Henseender eens, identiske; og at de følgeligen kunne tænkes henstillede saaledes, at den ene har netop samme Begrændsning som den anden, d. e. at de dække hinanden.

Dækning, Congruents, er derfor Maaden paa hvilken to Rumstørrelsers Identitet godtgjøres. Desaarsag anvendes i Geometrien Ordet Congruents for Identitet. Det bør vel erindres, at de geometriske Legemer ere uden al Forbindelse med enhver physisk Egenskab, som Legemerne i Naturen besidde; thi uden dette vilde Materiens Modstand og Uigjennemtrængelighed gjøre Dækningen umulig.

Congruent med betegnes ved $\cong$

Congruente Størrelser have samme Storhed og Form; men Ligestorhed kan finde Sted uden at Dækning er mulig. Saaledes kunne to Linier være ligestore d. e. have samme Længde, uden at kunne dække hinanden, f. Ex. en ret og en krum Linie. Ligedan kunne to Flader være ligestore, og dog have forskjellig Form. Man tænke sig, af en hvilkensomhelst begrændset Flade, et Stykke afsondret og atter tilsat, men i en anden Stilling, og man har da en anden Flade liig den første, forbi den bestaaer af samme Dele, men som er af en anden Form. Det samme vilde være Tilfældet med Legemer.

5— At maale en Størrelse er at finde dens Forhold til Eenheden; altsaa bør enhver Theorie om Udmaaling kunne reduceres til, paa den simpleste Maade, at finde to eensartede Størrelsers Forhold.

De Størrelser, der lettest sammenlignes, ere hele Tal; derfor har man søgt, at bringe alle andre tilbage paa disse. Naar en Rumstørrelse skal udmaales, tænker man sig Eenheden bragt paa samme, og omført saamange Gange som muligt. Indeholdes denne nøie et vist Antal Gange i hiin, da er det fundne Tal det søgte Forhold; men hvis ikke, da forestiller man sig de to Størrelser deelt i samme ligestore Deel, og Forholdet mellem de to fundne hele Tal er da den givne Størrelses Forhold til Eenheden; og følgelig dens Storhed et Product af dette Forhold og Eenheden.

Denne Fremgangsmaade forudsætter, at den givne Størrelse er commensurabel med Eenheden d. e. at disse have et Fællesmaal, en Størrelse, der nøie indeholdes i dem begge. Men det kan indtræffe at disse ikke have noget Fællesmaal, og at altsaa deres Forhold ikke kan udtrykkes ved Forholdet mellem to hele Tal, ei heller mellem to brudne Tal, thi dette kunne stedse føres tilbage paa hiint. Dog kan man i dette Tilfælde, hvor den givne Størrelse siges at være incommensurabel med Eenheden, stedse udlede et Forhold, der afviger mindre fra det

sande end enhver given Størrelse; thi ved at dele Eenheden i saa smaae Dele, som man selv vil, og føre een af disse Dele saamange Gange som mulig, paa den Størrelse, man vil udmaale, kan den Rest, man bortkaster, da den er mindre end een af disse Dele, blive mindre end enhver given Størrelse, og altsaa det Forhold, man udleder, afvige saalidet, som man ønsker, fra det sande Forhold.

Denne Fremgangsmaade følges ved Størrelser, der letteligen sammenlignes, naar den ene bringes paa den anden: man søger nemlig deres Fælledsmaal, og udleder derpaa deres Forhold i Tal.

Der gives Rumstørrelser, der vanskeligen eller slet ikke paa denne Maade kunne sammenlignes; men Geometrien deels lærer at finde andre af samme Storhed, der lettere sammenlignes, deels godtgjør at visse Rumstørrelser forholde sig som andre af en simplere Art, og fører saaledes al Udmaaling tilbage paa de simpleste Størrelsers Sammenligning.

Note. Vi betjene os i det Følgende af de algebraiske Tegn og de simpleste Operationer, samt støtte os paa Læren om Proportioner; vi henvise derfor til Algebraen disse Gjenstande betræffende.

Planimetrie.

1. Linier.

I. Den rette Linie.

6— Af Definitionen paa den rette Linie (№ 2, I.) følger, at

I. Afstanden mellem to Punkter A og B er Længden af den rette Linie AB, hvis Ender ere disse to Punkter. Fig. 3.

II. Kun een ret Linie kan drages fra eet Punkt til et andet.

7— Vi kunne tænke os en ret Linie AB forlængret i det Uendelige udover begge sine Endepunkter saaledes, at Forlængringerne og Linien indenfor sine først antagne Grændser udgjøre een ret Linie, d. v. s. at naar hvilkesomhelst to Punkter A′, B′, eet i hver Forlængring, forbindes ved en ret Linie, denne da dækker Linien A′ABB′ i hele sin Udstrækning. Af denne Egenskab følger, at

I. To givne Punkter bestemme en ret Linies Beliggenhed.

II. Naar to rette Linier have to Punkter A og B tilfælleds, da dække de hinanden, ikke alene i Strækningen AB, men endog i deres Forlængringer i det Uendelige, og ere altsaa, hvad Beliggenhed angaaer, kun een ret Linie.

III. Naar to rette Linier skjære hinanden, da er det kun i eet Punkt.

8— Rette Linier kunne, ligesom andre eensartede Størrelser, underkastes Addition, Subtraction, Multiplication og Division.

Fig. 4. 1º To rette Linier AB og CD adderes, naar den ene bringes umiddelbar i Forlængringen af den anden. Antag AB = EF og CD = FG, saa er Summen AB + CD eller EF + FG = EG. Paa samme Maade adderes end flere Linier.

Fig. 5. 2º Søges Differensen mellem to Linier AB og CD, saa afsætter man den mindste paa den største, fra eet Endepunkt A til E, og finder saaledes Differensen EB = AB — AE = AB — CD.

Vi kunne nu ogsaa finde Resultatet af et hvilketsomhelst Antal, deels Additioner, deels Subtractioner, f. Ex. af A + B — C — D, hvor Bogstaverne udtrykke givne Linier; ved at søge Summen af de to første A + B og Summen af de to sidste C + D, og endelig drage den anden Sum fra den første; thi A + B — C — D = A + B — (C + D).

Fig. 6. 3º Man multiplicerer en Linie AB med et givet Tal f. Ex. 4, ved at addere 4 ligestore Linier AB, og finder saaledes CD = 4 AB.

Note. Productet af to Linier og sammes Betydning forklares i det Følgende.

4º Vi kunne vel forestille os en Linie deelt i et vist Antal ligestore Dele, vel endog ved Forsøg, med Passeren, foretage denne Inddeling; men den geometriske Maade, ved Construction, at dele en given Linie i et bestemt Antal ligestore Dele, eller, almindeligere, at dele en Linie i Dele, der staae i givne Forhold til hinanden, læres først i det Følgende.

9— At maale Afstanden mellem to Punkter, eller Længden af en ret Linie, er at finde dens Forhold til en anden ret Linie, der tages til Eenhed. Man bringer denne paa hiin, og, hvis der efterlades en Rest, søger man deres Fællesmaal, og udleder derpaa deres Forhold i Tal (Nº 5). Denne Undersøgelse er altsaa med Hensyn til Linier, hvad Opsøgningen af den største fællesDeler er med Hensyn til Tal.

10. Opg. At finde to givne Liniers Forhold, eller i det mindste en Nærmelse til samme.

Lad AB og CD være de to givne Linier. Fig. 7.

Man bringer den Mindste, CD, paa den Største, AB, og undersøger hvormange Gange denne indeholder hiin. Man finder f. Ex. to Gange og Resten BE.

Man bringer denne Rest BE paa Linien CD, og finder f. Ex. at den indeholdes een Gang, og giver Resten DF.

Man undersøger herpaa hvormange Gange den anden Rest, DF, indeholdes i den første, BE, og finder f. Ex. een Gang, samt Resten BG.

Fremdeles føres den tredie Rest, BG, saamange Gange som muligt om paa den anden, DF.

Man vedbliver saaledes, indtil man finder en Rest, der indeholdes nøie et Antal Gange i den foregaaende Rest.

Den sidste Rest er de to givne Liniers Fællesdsmaal; og betragtes den som Eenhed, da leder den let til de foregaaende Resters og endelig til de givne Liniers Værdier, fra hvilke man slutter til deres Forhold i Tal. (Arithm. № 39, 41).

Finder man f. Ex. at GB indeholdes nøie to Gange i FD, da er GB de to givne Liniers Fællesdsmaal. Sættes $GB = 1$, saa er $FD = 2$, men $EB = FD + GB$, altsaa $EB = 3$. Fremdeles var $CD = EB + FD$, altsaa $CD = 5$, og endelig $AB = 2CD + EB$ eller $AB = 13$; følgelig $AB : CD = 13 : 5$. Tages CD til Eenhed, saa er $AB = \frac{13}{5}$, og tages AB til Eenhed, da udtrykkes CD ved $\frac{5}{13}$.

Forholdstallet kunne vi udlede, ligesom i Arithmetiken ved to Tals største fælleds Deler, paa denne Maade:

AB	CD	EB	FD	GB . . . Fællesdsmaal
	2	1	1	2
13	5	3	2	1

følgelig $AB = 13GB$; $CD = 5GB$; $\frac{AB}{CD} = \frac{13}{5}$.

Det er muligt, at, hvorvidt man end fortsætter Operationen,

man aldrig træffer en Rest, der indeholdes nøie i den foregaaende, i hvilket Tilfælde de to givne Linier ikke have noget Fællesdsmaal, og at altsaa deres Forhold er incommensurabelt. Omendskjønt dette, isaafald, er uangivelig i Tal, saa er man dog stedse istand til, ved at bortkaste den sidste Rest, hvor man afbryder Operationen, at udlede et Forhold, der ligger det sande saameget nærmere, jo mindre den sidste Rest er.

11— Man siger om to sammenstødende Linier, at de, eftersom de vige mere eller mindre ud fra hinanden, danne en Fig. 8. større eller mindre Vinkel; at f. Ex. Linierne DA og AB, der vige mere ud fra hinanden end Linierne CA og AB, danne en større Vinkel end disse.

De to Linier, der danne Vinklen, kaldes dens Been, og deres Sammenstødningspunkt, dens Toppunkt. En Vinkel benævnes ved tre Bogstaver, der tillige benævne Benene: det midterste Bogstav angiver Toppunktet. Saaledes benævnes den Vinkel, der dannes af Linierne DA og AB, ved DAB, den, der dannes af CA og AB, ved CAB. Man benævner ogsaa en Vinkel ved eet Bogstav, sat i Vinkelaabningen; saaledes CAB ved m. Disse Benævningsmaader ere især nødvendig hvor, som her, flere Vinkler have fælleds Toppunkt; men hvor dette ei finder Sted kan Vinklen benævnes ved Toppunktsbogstavet alene; Fig. 9. derfor benævnes Vinklen CAB ogsaa ved A.

Vinkel betegnes ved $\angle$

Note. Denne Slags Vinkler kaldes retlinede, plane Vinkler, naar man vil skjælne dem fra andre forekommende.

12— To Vinkler ere ligestore, naar, ved at bringe den Ene paa den Anden, den Enes Been falde paa den Andens. Saaledes er $\angle$ C′A′B′ = $\angle$ CAB, naar, ved at bringe den med Benet A′B′ paa AB, Toppunktet A′ paa A, det andet Been A′C′ falder sammen med AC. Det er ikke nødvendigt for at Ligestorhed kan finde Sted, at den ene Vinkels Been ere ligesaa store som den andens; thi naar A′B′ og AB have et fæl-

leds Stykke, da udgjøre de kun een ret Linie (Nr. 7, II.); det Samme er Tilfældet med $A'C'$ og AC. Altsaa er en Vinkels Storhed uafhængig af Benenes Længde.

13— I. Naar en ret Linie CD møder en anden AB, Fig.16.
der er udstrakt til begge Sider af Sammenstødningspunktet D, da danner den med denne to Vinkler CDA og CDB som, med Hensyn til hinanden, kaldes Jevnsidesvinkler.

II. Naar en ret Linie CD danner med en anden AB to ligestore Jevnsidesvinkler, da kaldes hver af disse Vinkler en ret Vinkel, og Linien CD siges at være perpendiculær paa AB. I dette Tilfælde hælder Linien CD hverken mod B eller A. En Linie DE hælder mere og mere mod en anden AB, jo større Vinklen EDC er, som den danner med denne Linies Perpendiculær CD.

En ret Vinkel udtrykkes ved R.

Perpendiculær paa betegnes ved $\perp$

III. En skjæv Vinkel er den, der ikke er ret; den kaldes spids Vinkel, naar den er mindre, stump Vinkel, naar den er større end en ret Vinkel.

14— Alle rette Vinkler ere ligestore.

Lad ADC og $A'D'C'$ være to rette Vinkler. Hvis de ikke vare ligestore, da var $A'D'C'$ enten større eller mindre end ADC. Antag $A'D'C' > ADC$, at $A'D'C'$, bragt paa den Anden, faldt som ADE, da var, fordi $A'D'C'$ er ret, $\angle EDB = ADE$ og, fordi ADC er ret, $\angle CDB = ADC$, men $\angle ADE > ADC$, altsaa $\angle EDB > CDB$, hvilket er umuligt. Vinklen $A'D'C'$ kan heller ikke være mindre end ADC, thi hvis den faldt som ADF, da uddrog man den Slutning, at $\angle FDB$ var $< CDB$. Da nu $\angle A'D'C'$ er ikke $>$ og ikke $< ADC$, saa er $\angle A'D'C' = ADC$. Altsaa ere alle rette Vinkler ligestore.

15— Naar en ret Linie CD møder en anden AB, da Fig.11.
er Summen af de to Jevnsidesvinkler $ADC + CDB = 2R$.

Tænke vi os i Punktet D opreist en Linie $DE \perp AB$, da er $\angle ADC = ADE + EDC$, altsaa $\angle ADC + CDB = ADE + EDC + CDB$, men $\angle ADE = R$ og $\angle EDC + CDB = EDB = R$, altsaa $\angle ADC + CDB = 2R$.

Følg. I. Naar een af Vinklerne ADC og CDB er ret, da er ogsaa den anden ret.

Fig. 12. II. Naar Linien DE er $\perp AB$, saa er omvendt $AB \perp DE$.

Thi er $DE \perp AB$, da er $\angle ACD = DCB = R$, og, er saaledes $\angle ACD$ ret, da er og dens Jevnsidesvinkel ACE ret, altsaa $\angle ACD = ACE$, og følgelig $AB \perp DE$.

Fig. 13. III. Alle Vinklerne ACD, DCE, ECF og FCB, der dannes af en ret Linie AB og andre fra eet Punkt i denne, og til samme Side, udgaaende rette Linier CD, CE og CF, udgjøre tilsammen 2R; thi de kunne samles i to Jevnsidesvinkler ACD og DCB, hvis Sum er 2R.

Fig. 11. Anm. En Vinkel CDB kaldes Supplement til en anden CDA, med hvilken den udgjør en Sum af to rette Vinkler, og Complement til en Vinkel CDE, med hvilken den udgjør een ret.

Fig. 14. 16— Naar to Vinkler ADC og CDB, der ligge jevnsides og have eet Been og Toppunkt tilfælleds, udgjøre tilsammen to rette Vinkler, da ere de to yderste Been AD og BD een ret Linie.

Thi var ei DB, men DE, Forlængringen af AD, altsaa ADE en ret Linie, saa var $\angle ADC + CDE = 2R$, men, efter Forudsætningen, var $\angle ADC + CDB = 2R$, altsaa $\angle ADC + CDE = ADC + CDB$, hvoraf fulgte $\angle CDE = CDB$, hvilket er umuligt; altsaa maae DB være Forlængringen af AD.

Fig. 15. 17— To Vinkler AEC og BED kaldes, med Hensyn til hinanden, Topvinkler, naar den Enes Been ere Forlængringer af den Andens.

Naar to rette Linier AB og CD skjære hinanden, da fremstaae to Par Topvinkler, 1) AEC og BED, 2) BEC og AED.

18. To Topvinkler ere ligestore.

Da AB er en ret Linie, saa er ∠ AEC + BEC = 2R, Fig. 15.
og, da CD er en ret Linie, saa er ∠ BEC + BED = 2R, altsaa ∠ AEC + BEC = BEC + BED, og følgelig ∠ AEC = BED.

Man beviser paa samme Maade, at ∠ BEC = AED.

Følg. I. Summen af de fire Vinkler, der ligge om to rette Liniers Skjærepunkt, er = 4R; thi de to Vinkler AEC og BEC udgjøre tilsammen to rette, og de to øvrige BED og AED have, som Topvinkler til hine, samme Værdie.

II. Naar een af de fire Vinkler, der ligge om to rette Liniers Skjærepunkt, er ret, da ere de øvrige ogsaa rette Vinkler; Fig. 12.
thi naar ∠ ACD er ret, da ere dens Jevnsidesvinkler BCD og ACE, og dens Topvinkel BCE, ogsaa rette Vinkler.

III. Naar et hvilketsomhelst Antal rette Linier AC, BC, Fig. 16.
DC &c. støde sammen i eet Punkt, da er Summen af alle de, om dette Punkt liggende, Vinkler ACB, BCD, DCE, ECF, FCA, liig 4R; thi drages gjennem Punktet C to rette Linier BG, HK, perpendiculær paa hinanden, da fremstaae 4 rette Vinkler, hvis Dele netop ere hine Vinkler.

19. I. En Bue er et hvilkensomhelst Stykke af en Cir- Fig. 2.
kellinie ABEA.

Bue betegnes ved ⌒

II. En Radius er en ret Linie BO draget fra Centret O til et hvilketsomhelst Punkt B i Cirkellinien. Alle Radier AO, BO, CO &c. ere ligestore; thi alle Punkter i Cirkellinien ligge ligelangt fra Centret (N°. 2, VII.)

For at finde alle de Punkter i en Plan, der ligge i en given Afstand *ab* fra et givet Punkt O i denne Plan, er det tilstrækkeligt fra Punktet O, som Centrum, med en Radius AO = *ao*, at beskrive en Cirkellinie.

20. I. En Polygonlinie, en Curve, eller en Linie hvis Dele ere deels rette, deels krumme, siges at være convex, naar

den ikke kan skjæres i flere end to Punkter af en ret Linie, hvorledes denne end drages.

II. En plan Figur er en paa alle Sider begrændset Plan. Den er retlinet, eller krumlinet, eller blandetlinet, eftersom Grændslinierne ere rette, eller krumme, eller deels rette deels krumme.

Fig.17. En retlinet Figur kaldes ogsaa Mangekant, Polygon, dens Grændslinier, Siderne, og alle dens Sider tilsammentagne, Perimeteren.

En Cirkel er en plan Figur, begrændset af en Cirkellinie. Denne kaldes da Cirkelens Peripherie.

En Figur er convex, naar dens Grændse er convex.

III. En Polygon kan ikke have færre end tre Sider (№ 11);
Fig.19. en saadan Figur ABC kaldes en Triangel.

De øvrige Polygoner benævnes, almindelig, efter Sidernes Antal, ved firsidede, femsidede etc. Polygoner, eller Firkanter, Femkanter etc. Undertiden forekomme ogsaa de græske Benævnelser: Pentagonen har 5 Sider, Hexagonen 6, Heptagonen 7, Octogonen 8, Enneagonen 9, Decagonen 10, Dodecagonen 12, Pentedecagonen 15.

Fig.17. IV. Ved Polygoner er en indvendig Vinkel ABC den, der dannes af to sammenstødende Sider AB og CB; en udvendig Vinkel ABK den, der dannes af en Side og den tilstødende Sides Forlængring.

En indvendig Vinkel BCD er udgaaende, naar Benenes Forlængring udover Toppunktet ligger udenfor Figuren; den er, som DEF, indgaaende, naar denne Forlængring gaaer igjennem Figuren.

Fig.18. I en convex Polygon ABCDE ere alle Vinklerne udgaaende; thi havde den som Fig. 17 en indgaaende Vinkel, da kunde man drage en ret Linie GH, der skjar Grændsen i flere end to Punkter.

Anm. I det Følgende underforstaaes stedse, naar der tales

om Polygoner, at de ere convexe. Denne Bemærkning er nødvendig; thi ellers maatte adskillige Sætninger modificeres.

En Polygon har lige saamange indvendige Vinkler som Sider; thi to sammenstødende Sider danne een Vinkel; lægges een Side til, da haves to Vinkler, o. s. f. een Vinkel mindre end Sider, men den sidste Side, der lukker Figuren, giver to Vinkler; altsaa har en Polygon lige saamange Vinkler som Sider.

V. En Polygon er **ligesidet**, naar alle Siderne ere ligestore.

ABC er en ligesidet Triangel. Fig.19.

En Triangel ABC er **ligebenet**, naar to Sider ere ligestore; men uligesidet, som ABC, naar alle tre Sider ere uligestore. Fig.20. Fig.21.

VI. En Polygon er **ligevinklet**, naar alle Vinkler ere ligestore.

En Triangel er **retvinklet**, naar den har een ret Vinkel, **stumpvinklet**, naar den har een stump Vinkel, **spidsvinklet**, naar de tre Vinkler ere spidse. Stump- og spidsvinklede Triangler kaldes, under eet Navn, **skjævvinklede**.

I en retvinklet Triangel ABC kaldes den rette Vinkels modstaaende Side BC **Hypotenus**, og de to Sider BA og CA, der indeslutte den rette Vinkel A, **Catheter**. Fig.22.

I en ligebenet Triangel ABC er **Basis** den Side AB, der er ulig de to øvrige, og **Toppunktet** den ovenfor Basis liggende Vinkels Toppunkt C. I enhver anden Triangel tager man hvilkensomhelst af Siderne til Basis, og det overfor denne liggende Toppunkt er da ogsaa Trianglens. Fig.20.

Perpendiculæren CD, fældet fra Toppunktet ned paa Basis, kaldes Trianglens **Høide**.

VII. En Polygon er **regulær**, naar den er ligesidet og ligevinklet, **irregulær**, naar Dette ei finder Sted.

21— To Triangler ere congruente, naar to Sider og deres indesluttede Vinkel i den ene Triangel ere liig de samme Stykker i den anden.

Fig. 23. Naar Trianglerne ABC og A′B′C′ have Siden AB = A′B′, Siden AC = A′C′, og ∠ A = A′, da ere de congruente.

Bringes △ A′B′C′ saaledes paa △ ABC, at de ligestore Sider A′B′ og AB dække hinanden, da falder, fordi ∠ A′ = A, Siden A′C′ paa AC, altsaa, da A′C′ = AC, falder Punktet C′ paa C. Da B′C′ og BC nu have fælleds Endepunkter, saa dække ogsaa disse to Sider hinanden; altsaa er △ A′B′C′ ≅ ABC.

Følg. Naar de tre Stykker: to Sider og deres indesluttede Vinkel i to Triangler ere ligestore, f. Ex. Siden AB = A′B′, Siden AC = A′C′, og ∠ A = A′, da kan man slutte, at de tre øvrige Stykker ogsaa ere ligestore, nemlig Siden BC = B′C′, ∠ B = B′ og ∠ C = C′.

Anm. Det bemærkes, at i to congruente Triangler ligge de ligestore Sider BC, B′C′ overfor ligestore Vinkler A, A′; og omvendt de ligestore Vinkler B, B′ overfor ligestore Sider AC, A′C′.

22. To Triangler ere congruente, naar een Side og dens to hosliggende Vinkler i den ene Triangel ere liig de samme Stykker i den anden.

Fig. 23. Naar Trianglerne ABC og A′B′C′ have Siden AB = A′B′, ∠ A = A′, og ∠ B = B′, da ere de congruente.

Bringes △ A′B′C′ saaledes paa △ ABC, at de ligestore Sider A′B′ og AB dække hinanden, da falder, fordi ∠ A′ = A, Siden A′C′ paa AC, altsaa ligger Punktet C′ i Linien AC; endvidere falder, fordi ∠ B′ = B, Siden B′C′ paa BC, altsaa ligger Punktet C′ ogsaa i Linien BC; dette Punkt C′ kan derfor kun falde i disse to Liniers, AC, BC's Skjærepunkt C (№ 7); altsaa er △ A′B′C′ ≅ ABC.

Følg. Naar de tre Stykker: een Side og dens to hosliggende Vinkler i to Triangler ere ligestore, f. Ex. AB = A′B′, ∠ A = A′, og ∠ B = B′, da kan man slutte, at de tre øvrige Stykker ogsaa ere ligestore, nemlig ∠ C = C′, Siden AC = A′C′, og Siden BC = B′C′.

23— I enhver Triangel er en hvilkensomhelst Side mindre end Summen af de to øvrige.

Thi den rette Linie AB er den korteste Linie man kan drage fra Punktet A til B (Nº 2, I), altsaa AB < AC + CB. Fig.23.

24— Summen af de to Linier OA og OB, dragne fra et Punkt O, inden i en Triangel ABC, til Endepunkterne af en Side AB, er mindre end Summen af de to øvrige Sider AC og CB. Fig.24.

Forlængres Linien AO indtil den støder an mod BC, i Punktet D, da har man OB < OD + DB (Nº 23) altsaa, naar AO adderes til begge Sider af <, er AO + OB < AO + OD + DB, eller AO + OB < AD + DB, men AD < AC + CD, følgelig AD + DB < AC + CB, altsaa saameget mere AO + OB < AC + CB.

Anm. Man beviser let, at en hvilkensomhelst Polygonlinie ABCD er mindre end en anden ANQD, af hvilken den omfattes. Fig.25.

Forlængres AB til R, da har man den rette Linie AR < AMNPR, altsaa, naar RQD adderes, ARQD < ANQD.

Forlængres BC til S, da har man BS < BRQS, og, naar AB og SD adderes, ABSD < ARQD, men ARQD < ANQD, altsaa ABSD < ANQD. Man beviser ligedan at ABCD < ABSD, følgelig ABCD < ANQD.

Denne Sætning finder ikke alene Sted ved Polygonlinier, men en hvilkensomhelst convex Linie ACB er mindre end enhver anden, af hvilken den omfattes. Fig.26.

Thi hvis Linien ACB ikke var mindre end alle de, af hvilke den omfattes, da maatte iblandt disse findes een Linie, der var kortere end alle de øvrige, og som skulde være mindre end ACB, eller i det høieste lig ACB. Lad AMPB være denne omfattende Linie, og lad os, hvorsomhelst mellem de to Linier, drage en ret Linie, som ikke møder Linien ACB, eller i det høieste kun berører denne, saa har man den rette Linie DE < DMPE,

altsaa, naar man istedetfor Stykket DMPE substituerer den rette Linie DE, saa har man den omfattende Linie ADEB < AMPB; men, efter Hypothesen burde denne være den korteste af alle, altsaa kan denne Hypothes ei finde Sted; altsaa er ACB mindre end enhver Linie, der omfatter samme.

Man beviser fuldkommen paa samme Maade, at enhver conFig.27. vex, lukket Linie ABC er mindre end en anden, af hvilken den paa alle Sider omfattes, hvad enten disse to Linier berøre hinanden i eet eller flere Punkter, eller aldeles ikke berøre hinanden.

Fig.28. 25— Naar de to Sider A′B′ og B′C′ i Trianglen A′B′C′ ere liig de to Sider AB og BC i Trianglen ABC, men Vinklen B′, der indesluttes af de to første, er mindre end Vinklen B, der indesluttes af de to sidste, da er den tredie Side A′C′ i den første Triangel mindre end den tredie Side AC i den anden Triangel.

Føres Trianglen A′B′C′ paa ABC, da kunne tre forskjellige Tilfælde indtræffe:

Fig.28. 1° Naar Punktet C′ falder paa Siden AC, i Punktet C″, da er det indlysende, at AC″ eller A′C′ < AC.

Fig.29. 2° Naar Punktet C′ falder inden i Trianglen, i C″, da er AC″ + C″B < AC + CB (№ 24), men, efter Forudsætningen er C′B′ eller C″B = CB, altsaa AC″ eller A′C′ < AC.

Fig.30. 3° Naar Punktet C′ falder udenfor Trianglen, i C″, da er AC″ < AI + IC″, og BC < IC + IB, altsaa AC″ + BC < AI + IC″ + IC + IB, men AI + IC = AC og IC″ + IB = BC″, følgelig AC″ + BC < AC + BC″, og, da BC = BC″, Siden AC″ eller A′C′ < AC.

Modsætning: Naar de to Sider A′B′ og B′C′ i △A′B′C′ ere liig de to Sider AB og BC i △ABC, men den tredie Side A′C′ i den første Triangel er mindre end den tredie Side i den anden Triangel, da er ∠B′, i den første, mindre end ∠B i den anden.

Thi benægtede man denne Sætning, da skulde ∠B′ enten

være $=$ eller $> B$, hvoraf fulgte, i første Tilfælde (№ 21), at Siden $A'C'$ var $= AC$, og, i andet Tilfælde, at $A'C'$ var $> AC$, men begge Slutninger stride imod Forudsætningen, altsaa er $\angle B' < B$.

26— To Triangler ere congruente, naar de tre Sider i den ene Triangel ere liig de samme Stykker i den anden.

Naar Trianglerne ABC og $A'B'C'$ have $AB = A'B'$, Fig. 23.
$AC = A'C'$, og $BC = B'C'$, da er og $\angle A = A'$, $\angle B = B'$, og $\angle C = C'$.

Thi var $\angle A < A'$, da fulgte (№ 25), at Siden BC var $< B'C'$, og var $\angle A > A'$, da fulgte, at Siden BC var $> B'C'$, men $BC = B'C'$, efter Forudsætningen, altsaa er $\angle A$ ikke $<$ og ikke $> A'$, altsaa er $\angle A = A'$. Fremdeles indesluttes $\angle A$ af to Sider, der ere liig de to Sider, der indeslutte $\angle A'$, altsaa (№ 21) er $\triangle ABC \cong A'B'C'$, og følgelig $\angle B = B'$, og $\angle C = C'$.

27— I en ligebenet Triangel ligge ligestore Vinkler overfor de ligestore Been.

Naar, i $\triangle ABC$, Siden AC er $= BC$, da er $\angle B = A$. Fig. 20.

Drages Linien CD fra Toppunktet C til Midten af Basis AB, saa fremstaae to congruente Triangler ACD og BCD; thi de have Siden CD tilfælleds, Siden $AC = BC$, efter Forudsætningen, og Siden $AD = BD$, ifølge Constructionen, altsaa (№ 26) er $\angle A = B$.

Følg. I en ligesidet Triangel ere alle tre Vinkler ligestore. Altsaa er en ligesidet Triangel en regulær Figur (№ 20, VII).

Anm. Af $\triangle ACD \cong BCD$ følger $\angle ACD = BCD$, og $\angle ADC = BDC$, altsaa (№ 13, II) ere de to sidste Vinkler rette, og $CD \perp AB$ d. v. s. en ret Linie draget, i en ligebenet Triangel, fra Toppunktet til Midten af Basis, staaer perpendiculær paa Basis, og halverer dennes modstaaende Vinkel.

28— Naar to Vinkler i en Triangel ere ligestore, da ere deres modstaaende Sider ligestore, og altsaa Triangelen ligebenet.

Fig. 31. Naar, i $\triangle ABC$, $\angle A$ er $= B$, da er Siden $BC = AC$. Thi vare de uligestore, f. Ex. $BC > AC$, da kunde, paa BC afsættes et Stykke $BD = AC$, og drog man Linien AD, saa havde man to Triangler ABC og ABD, i hvilke $\angle A = B$, Siden $AC = BD$, og AB en fælleds Side, altsaa (№ 21) $\triangle ABC \cong ABD$, hvilket er umuligt, da den sidste er kun en Deel af den første; altsaa kunne Siderne BC og AC ikke være uligestore, altsaa er $\triangle ABC$ ligebenet.

Følg. Naar en Triangel er ligevinklet, da er den ogsaa ligesidet.

29— Naar een Vinkel i en Triangel er større end en anden, da ligger en større Side overfor den større Vinkel; og omvendt, naar een Side er større end en anden, da ligger en større Vinkel overfor den større Side.

Fig. 32. 1º Er, i $\triangle ABC$, $\angle A > B$, da er Siden $BC > AC$. Lad $\angle \alpha$ være $= B$, saa er (№ 28) $DB = DA$, nu er $AD + DC > AC$, men $AD + DC = BD + DC = BC$, altsaa $BC > AC$.

2º Er Siden $BC > AC$, da er $\angle A > B$. Hvis $\angle A$ var $< B$, da fulgte (1º), at Siden BC var $< AC$, hvilket strider imod Forudsætningen, og hvis $\angle A$ var $= B$, da fulgte (№ 28), at Siden BC var $= AC$, som ogsaa strider imod Forudsætningen; altsaa er $\angle A > B$.

Fig. 33. **30— Opg. At construere en Triangel, hvis tre Sider *a*, *b* og *c* ere givne.**

Man drager en ret Linie $BC = a$. Fra Punktet C, som Centrum, med en Radius $CA = b$ beskrives en Bue; fra Punktet B, som Centrum, med en Radius $BA = c$, beskrives en anden Bue, og fra disse to Buers Skjærepunkt A, til B og C,

drages Linierne AB og AC. Trianglen ABC fyldestgjør Opgaven, thi Siderne have de givne Længder a, b, c.

Anm. Det er en nødvendig Betingelse, at Summen af hvilkesomhelst to af de givne Sider er større end den tredie (№ 23).

31— Opg. I Punktet A paa Linien AD, at afsætte en Vinkel liig en given Vinkel A'. Fig. 31.

Den forrige Opgave tjener til at opløse denne; thi forbindes to hvilkesomhelst Punkt B', C', eet i hvert af den givne Vinkels Been, ved Linien B'C', og de tre Sider af Trianglen A'B'C' anvendes til, paa AB, at construere en Triangel ABC $\cong$ A'B'C', da har man $\angle$ A $=$ A'.

32— Vinkler kunne, ligesom andre eensartede Størrelser, underkastes Addition, Subtraction, &c.

Naar to Vinkler skulle adderes, saa construerer man en $\angle$ AOB liig den ene givne Vinkel (№ 31), og paa OB, i Fig. 35. samme Toppunkt O, en $\angle$ BOC liig den anden givne Vinkel; da er $\angle$ AOC $=$ AOB $+$ BOC liig Summen af de to givne Vinkler. Vare der end flere Vinkler at addere, saa afsættes den tredie paa CO, ligesom den anden paa BO o. s. f: de to yderste Been indeslutte en Vinkel, der er Summen af alle de givne.

Søges to Vinklers Differens, saa afsættes de begge paa een Linie til samme Side og med fælleds Toppunkt, som AOC og AOB; man finder da $\angle$ BOC $=$ AOC $-$ AOB. Skulde fra een Vinkel flere subtraheres, da søger man disses Sum, og drager den fra hiin.

Naar en Vinkel skulde multipliceres med et givet Tal, da er Construction som ved Addition, idet Vinklen afsættes saamange Gange som det givne Tal har Eenheder.

Om en Vinkels Deling tales i det Følgende.

En Vinkel kunne maales, eller, almindeligere, to Vinklers Forhold søges paa samme Maade som ved rette Linier (№ 10), idet man, i den største Vinkel, construerer det største Multiplum af den mindste Vinkel, som kunne indeholdes deri, dernæst i den

mindste Vinkel det største Multiplum af Resten o. s. f.; men, da denne Maade ville være særdeles besværlig, har man udtænkt en lettere, omendskjønt indirect, Maade, som afhandles ved Cirkellinien.

Fig. 36. 33— Opg. At construere en Triangel, naar to Sider b, c og deres indesluttede Vinkel A′ ere givne.

Man construerer en Vinkel A = A′ (№ 31), afsætter paa det ene Been en Længde AC = b, paa det andet Been en Længde AB = c, og drager Linien BC, der bestemmer Triangelen ABC.

Fig. 37. 34— Opg. At construere en Triangel, naar een Side a og dennes to hosliggende Vinkler B′ og C′ ere givne.

Man drager en ret Linie BC = a, afsætter i Punktet B en ∠ CBA = B′, og i Punktet C en ∠ BCA = C′. Benene BA og CA skjære hinanden i et Punkt A, som er den tredie Vinkels Toppunkt, og altsaa ABC den forlangte Triangel.

Perpendiculærer.

Fig. 38. 35— Fra et givet Punkt A, udenfor en ret Linie DE, kan ikkun een Perpendiculær nedfældes paa denne Linie.

Thi lad os antage at man kunne drage to Perpendiculærer AB og AC. Forlængre AB mod F, tag BF = AB, og drag CF. I Trianglerne FBC og ABC er ∠ $x = y$ (№ 18, II), Siden BC tilfælleds, og Siden BF = AB, altsaa (№ 21) △ FBC ≅ ABC, og følgelig ∠ $m = n$, men der antoges ∠ n = R, altsaa ∠ m = R, ∠ $m + n$ = 2R, og følgelig ACF en ret Linie (№ 16); altsaa skulde mellem samme to Punkter A og F kunne drages to forskjellige rette Linier ABF og ACF, hvilket er umuligt (№ 6, II); altsaa er det umuligt at to Perpendiculærer kunne fældes fra eet Punkt til een ret Linie.

Anm. Fra eet Punkt D i en ret Linie AB kan ikkun een Perpendiculær opreises paa denne Linie; thi hvis man kunne have to Perpendiculærer DC og DE, da vare begge Vinklerne BDC og BDE = R, altsaa en Deel liig det Hele. Fig. 19.

Følg. To retvinklede Triangler ABC og A′B′C′ ere congruente, naar, foruden de rette Vinkler A, A′, een Vinkel B og Hypotenusen BC i den ene Triangel ere liig de samme Stykker i den anden. Fig. 39.

Bringes △ A′B′C′ saaledes paa △ ABC, at de ligestore Hypotenuser BC og B′C′ dække hinanden, da falder, fordi ∠ B′ = B, Siden B′A′ paa BA, og, da C′ falder i C, og ∠ A′ = A = R, saa maae C′A′ falde paa CA; thi faldt den som CD, da havde man to Perpendiculærer CA og CD nedfældede fra eet Punct C til een ret Linie, hvilket er umuligt, altsaa falder C′A′ paa CA, og, da B′A′ ligger paa BA, saa maae Punktet A′ falde paa A; altsaa dække Trianglerne hinanden.

23. Naar man fra et Punkt A, udenfor en ret Linie DE, nedfælder en Perpendiculær paa denne Linie, og til forskjellige Punkter i samme drager rette Linier AE, AC, AD ꝛc., da kunne bevises, at: Fig. 38.

1º Perpendiculæren AB er kortere end enhver skraa Linie.

2º To skraa Linier AC, AE, dragne, paa modsatte Sider af Perpendiculæren, til Punkter i DE, der ligge ligelangt fra Perpendiculæren, ere ligestore.

3º Af to skraa Linier AC og AD, eller AE og AD, dragne paa samme eller modsatte Sider af Perpendiculæren, er den længst, der viger meest ud fra denne.

Forlængre Perpendiculæren AB et Stykke BF = AB, og drag Linierne FC og FD.

1º Trianglerne FBC og ABC have ∠ $x = y$ (Nº 18, II) Siden CB tilfælleds, og Siden FB = AB, altsaa (Nº 21, Følg.) er Siden FC = AC, men den rette Linie ABF < ACF altsaa ½ABF < ½ACF, eller AB < AC.

2° Antages BC = BE, da have Trianglerne ABC og ABE, foruden disse ligestore Sider, en fælleds Side AB, og ∠ $y = z$, altsaa er Siden AC = AE.

3° I △ ADF er AC + CF < AD + DF (N° 24) altsaa $\frac{1}{2}$(AC + CF) < $\frac{1}{2}$(AD + DF), eller AC < AD, (1°).

Naar BD > BE, og man tager BC = BE, saa har man AC = AE, men AC < AD, altsaa AE < AD.

Følg. I. Perpendiculæren er Maalet for et Punkts Afstand fra en Linie.

II. Fra eet Punkt til een Linie kan man ikke drage tre ligestore rette Linier; thi hvis saa var, da laae to ligestore skraa Linier paa samme Side af Perpendiculæren, hvilket er umuligt.

Fig. 40. 37— 1° Ethvert Punkt i Perpendiculæren EF, opreist paa Midten C af en ret Linie AB, ligger lige saalangt fra det ene som fra det andet af dennes Endepunkter A og B; men derimod 2° ligger ethvert Punkt udenfor Perpendiculæren nærmere det ene end det andet af disse to Punkter A og B.

Thi 1° naar AC = BC, da ere de skraa Linier DA og DB ligestore (N° 36); hvilket og er Tilfældet med EA og EB, med FA og FB ꝛc., altsaa ligger hvert Punkt i Perpendiculæren EF lige saalangt fra A som fra B.

2° Men et hvilkersomhelst Punkt I udenfor Perpendiculæren ligger nærmere det ene Endepunkt B end det andet A; thi drages IA og IB, da vil een af disse Linier skjære Perpendiculæren i et Punkt D, som giver DB = DA, men den rette Linie IB < ID + DB, altsaa IB < ID + DA, eller IB < IA.

Følg. Naar en ret Linie FE har to Punkter, der, hvert især, ligger ligelangt fra to andre Punkter A og B, da ligger og ethvert andet Punkt i denne Linie ligelangt fra A og B, og Linien FE er perpendiculær paa Midten af Linien AB, der forener Punkterne A og B.

38— Opg. At dele en given ret Linie AB, ved en Perpendiculær, i to ligestore Dele. Fig. 41.

Fra Punkterne A og B, som Centrer, med een og samme Radius, der er større end Halvdelen af Linien AB, beskrives to Buer, der skjære hinanden i et Punkt D; paa samme Maade beskrives to Buer, der skjære hinanden i et andet Punkt E eller E′, og Linien DE drages: denne Linie er Perpendiculæren, der deler den givne Linie AB i to ligestore Dele.

Thi Punkterne D og E ligge, hvert især, ligelangt fra A og B, men igjennem to Punkter D og E kan ikkun een ret Linie DE drages, altsaa (Nº 37, Følg.) er DE Perpendiculæren, der gaaer igjennem den givne Linie AB's Midtepunkt C.

39— Opg. Fra et givet Punkt A, i en given ret Linie BC, at opreise en Perpendiculær. Fig. 42.

Man tager, i den givne Linie, to Punkter B og C, der ligge ligelangt fra A, og fra Punkterne B og C, som Centrer, med een og samme Radius, der er større end BA, beskrives to Buer, hvis Skjærepunkt D forbindes med A: Linien AD er den forlangte Perpendiculær.

Thi hvert især af de to Punkter A og D, ligger ligelangt fra B og C, altsaa (Nº 37, Følg.) er AD ⊥ BC.

Anm. Samme Construction tjener til i et Punkt A, i en given Linie BC, at afsætte en ret Vinkel BAD.

40— Opg. Fra et givet Punkt A, udenfor en ret Linie BC, at fælde ned paa denne en Perpendiculær. Fig. 43.

Fra Punctet A, som Centrum, med en tilstrækkelig stor Radius, beskrives en Bue, der skjærer Linien BC i to Punkter B og C, og fra disse to Punkter beskrives to Buer, hvis Skjærepunkt E forbindes med A: Linien AE er den forlangte Perpendiculær.

Thi Punkterne A og E ligge, hvert især, ligelangt fra B og C, altsaa (Nº 37, Følg.) er AE ⊥ BC.

41— Opg. Fra to givne Punkter A og B, udenfor en ret Linie CD, at drage to rette Linier AF og BF, der Fig. 44.

støde sammen i et saadant Punkt F i Linien CD, at Vinklerne m og n ere ligestore.

Fælder man fra det ene givne Punkt A ned paa CD en Perpendiculær, der forlængres til man har DE = AD, og man derpaa fra E, til det andet givne Punkt B, drager Linien EB, saa skjærer denne BC i det søgte Punkt F.

Thi drages Linien FA, da have Trianglerne AFD og EFD, $\angle x = y = R$, Siden DF tilfælleds, og Siden AD = DE, altsaa (Nº 21, Følg.) $\angle m = p$, men $\angle p = n$, som Topvinkler, altsaa $\angle m = n$.

Fig. 45. 42— Opg. Naar to Punkter A og B, i Aabningen af en Vinkel CDE, ere givne, da at finde, i hvert Been, eet Punkt L, L′ saaledes at Linierne AL, LL′, L′B danne ligestore Vinkler med det Been, i hvilket de støde sammen, at nemlig $\angle m = n$, og $\angle x = y$.

Man fælder fra Punktet A ned paa CD en Perpendiculær AH, tager CH = CA, forlængrer ED, fælder ned paa denne, fra Punktet H, Perpendiculæren HH′, tager C′H′ = C′H, og drager H′B, der skjærer ED i det ene søgte Punkt L′; drager man endelig L′H, da skjærer denne Benet CD, i det andet søgte Punkt L.

Thi drages Linien AL, da har man Trianglerne ALC og HLC i hvilke $\angle v = z = R$, Siden CL tilfælleds, og Siden CA = CH, altsaa $\angle m = u$, men $\angle u = n$, som Topvinkler, altsaa $\angle m = n$. Paa samme Maade bevises, ved Hjelp af Trianglerne HL′C′ og H′L′C′, at $\angle x = y$.

Anm. Har man to givne Punkter A og B′ i en hvilkensomhelst Polygon, og der i hver af Siderne CD, DE, EF, forlanges et Punkt L, L′, L″, saaledes at Linierne AL, LL′, L′L″ og L″B′ danne ligestore Vinkler med den Side, i hvilke de støde sammen, nemlig $\angle m = n$, $\angle x = y$, og $\angle r = s$; saa søger man, ved samme Construction som ovenfor, efterhaanden Punkterne H, H′, H″, drager H″B′, som giver det ene

søgte Punkt L″, drager derpaa L″H′, som giver det andet Punkt L′, og drager endelig L′H, som giver det tredie Punkt L. Beviset er aldeles som ovenfor.

43— To retvinklede Triangler ere congruente, naar Hypotenusen og een Cathete i den ene Triangel ere liig de samme Stykker i den anden.

Naar Trianglerne ABC og A′B′C′, retvinklede i A og A′, have Hypotenusen BC = B′C′, og Catheten AC = A′C′, da ere de congruente. Fig. 46.

Disse Triangler vilde unægteligen være congruente, naar den tredie Side AB var liig den tredie Side A′B′; men lad os antage, at disse Sider ere uligestore, at AB > A′B′. Tag AD = A′B′ og drag CD. Trianglerne ADC og A′B′C′ have ∠ A = A′, Siden AC = A′C′, og Siden AD = A′B′, altsaa (№ 21, Følg.) Siden CD = C′B′, men, efter Hypotesen er C′B′ = CB, altsaa CD = CB, hvilket er umuligt; thi CB viger mere end CD ud fra Perpendiculæren CA (№ 36); altsaa er det umuligt, at AB og A′B′ kunne være uligestore, og følgelig er △ ABC ≅ A′B′C′.

44— Opg. At construere en retvinklet Triangel, naar Perimeteren MP og den ene Cathete MN ere givne. Fig. 47.

Man drager en ret Linie BA, tager BA = MN, opreiser i A en Perpendiculær AD = NP, drager Linien BD, opreiser paa Midten af denne en Perpendiculær IC, der skjærer AD i et Punkt C, og drager endelig Linien CB. Trianglen ABC fyldestgjør Opgaven.

Thi da MP er Perimeteren, og MN den ene Cathete, saa er NP eller AD Summen af Hypotenusen og den anden Cathete; altsaa maa Trianglens Toppunkt C ligge saaledes i AD, at BC = CD, følgelig er Trianglen ACD ligebenet, og dens Toppunkt C ligger i Perpendiculæren IC opreist paa Midten af Basis BD. Toppunktet, der saaledes skal ligge i begge Linierne AD og IC,

er altsaa disse to Liniers Skjærepunkt C, og ABC den forlangte Triangel.

45— I enhver Triangel er Summen af dens tre Vinkler = 2 R.

Fig. 48. Lad os tage en hvilkensomhelst Triangel ABC, og antage at AB er den største Side og BC den mindste,*) at altsaa ACB er den største Vinkel og BAC den mindste.

Drag fra Punktet A, igjennem Midten I af den modstaaende Side BC, Linien AC′ = AB, og forlængre AB indtil man har AB′ = 2AI.

Naar de tre Vinkler i △ ABC betegnes ved A, B, C, og de tre Vinkler i △ A′B′C′ ved A′, B′, C′, da kan bevises, at C′ = B + C og A = A′ + B′, følgelig A + B + C = A′ + B′ + C′, d. v. s. at de tre Vinkler i hver af disse to Triangler have samme Sum.

For at bevise dette tager man AK = AI, og drager C′K, som vil give △ C′AK ≅ BAI, thi disse have en fælleds Vinkel C′AB, Siden AC′ = AB, og Siden AK = AI; altsaa er Siden C′K = BI, ∠ AC′K = ABC, og ∠ AKC′ = AIB.

Man har ogsaa △ B′C′K ≅ ACI, thi ∠ AKC′ + C′KB′ = 2R, ∠ AIC + AIB = 2R, og ∠ AKC′ = AIB, altsaa ∠ C′KB′ = AIC; endvidere er Siden C′K = IB = CI, og Siden KB′ = AK = AI; altsaa er Siden C′B′ = AC, ∠ B′C′K = ACB, og ∠ KB′C′ = CAI.

Heraf følger 1º at ∠ AC′B′, betegnet ved C′, er sammensat af to Vinkler, der ere liig Vinklerne B og C i △ ABC, altsaa C′ = B + C; og 2º at ∠ A i △ ABC er sammensat af ∠ C′AB′, eller A′, og ∠ CAI = B′, altsaa A = A′ + B′; følgelig A + B + C = A′ + B′ + C′.

Da man fremdeles, ifølge Forudsætningen, har AC < AB,

*) Denne Antagelse udelukker ikke det Tilfælde, i hvilket den mellemste Side AC er liig een af de yderste AB eller BC.

følgelig $C'B' < AC'$, saa er, i $\triangle AC'B'$, Vinklen $A' < B'$, men $A' + B' = A$, altsaa $A' < \frac{1}{2}A$.

Udføres samme Construction ved Trianglen $AB'C'$ for at danne en tredie Triangel $AB''C''$, hvis Vinkler vi ville betegne ved A'', B'', C'', saa har man ligedan $C'' = B' + C'$ og $A' = A'' + B''$, følgelig $A' + B' + C' = A'' + B'' + C''$. Altsaa have de tre Vinkler i hver af disse tre Triangler samme Sum; og man har tillige $A'' < \frac{1}{2}A'$, følgelig $A'' < \frac{1}{4}A$.

Fortsættes denne Række af Triangler $AC'B'$, $AC''B''$, etc., da vil man omsider finde en Triangel abc, hvis tre Vinkler har samme Sum som i $\triangle ABC$, og i hvilken Vinklen a er mindre end et hvilketsomhelst Led i den aftagende Progression $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{4}A$, $\frac{1}{8}A$, etc.

Man kan altsaa antage denne Række af Triangler fortsat indtil Vinklen a er mindre end enhver given Vinkel.

Naar man da, ved Hjelp af $\triangle abc$, construerede den følgende $\triangle a'b'c'$, saa vilde, i denne Triangel, Summen af de to Vinkler $a' + b'$ være $< a$, og følgelig være mindre end enhver given Vinkel; altsaa vilde Summen af de tre Vinkler i $\triangle a'b'c'$ blive reduceret næsten til den ene Vinkel c'.

For at finde det nøiagtige Maal for denne Sum, saa lad os forlængre Siden $a'c'$ mod d', og benævne den udvendige Vinkel $b'c'd'$ ved x'. Summen af denne Vinkel x' og den indvendige Vinkel c' er lig 2R (№ 15), altsaa $c' = 2R - x'$, og følgelig Summen af de tre Vinkler i $\triangle a'b'c'$ lig

$$2R + a' + b' - x'.$$

Men man kan tænke sig at Siderne og Vinklerne i $\triangle a'b'c'$ variere, idet den frem stiller de paafølgende Triangler, der fremstaae ved samme Construction, og som nærme sig mere og mere til den Grændse, hvor Vinklerne a' og b' ville være Nul. I denne Grændse falder den rette Linie $a'c'd'$ sammen med $a'b'$, og de tre Punkter a', c', b' ende med at ligge i een ret Linie. Vinklerne b' og x' blive da Nul paa samme Tid som a', og

Størrelsen $2R + a' + b' - x'$, som er Maalet for Summen af de tre Vinkler i $\triangle a'b'c'$, reduceres til 2R; altsaa, i enhver **Triangel er Summen af de tre Vinkler liig to rette Vinkler.**

Følg. I. Ere to Vinkler i en Triangel, eller og kun deres Sum givet, da finder man den tredie Vinkel, ved at søge Supplementet til denne Sum.

II. Naar to Vinkler i en Triangel ere liig to Vinkler i en anden, da er ogsaa den tredie Vinkel i den ene, liig den tredie Vinkel i den anden.

III. En Triangel kan kun have een ret Vinkel; thi hvis den havde to, da var den tredie Vinkel Nul. Altsaa endnu mindre kan en Triangel have flere end een stump Vinkel.

IV. I en retvinklet Triangel ere de to spidse Vinkler Complementer til hinanden.

V. I en ligesidet Triangel er hver Vinkel liig een tredie Deel af to rette, eller liig $\frac{2}{3}R$.

Fig. 20. VI. I en ligebenet Triangel ABC ere Vinklerne ved Basis $A = B = R - \frac{1}{2}C$, altsaa $\frac{1}{2}C = R - A$.

Fig. 49. VII. Naar man, ved en hvilkensomhelst Triangel ABC forlængrer en Side AB, saa har man en udvendig Vinkel CBD, der er liig Summen af de to modstaaende indvendige Vinkler A og C; thi den tredie Vinkel ABC er Supplement, saavel til $A + C$, som til sin Jevnsidesvinkel CBD.

Fig. 50. VIII. Følger man Contouren af en hvilkensomhelst Triangel ABC, og forlængrer hver Side udover dens Sammenstødningspunkt med den næste Side, da fremstaae tre udvendige Vinkler a, b, c, hvis Sum er liig 4R; thi hver udvendig Vinkel er Supplement til en indvendig, altsaa Summen af de tre Par ud- og indvendige Vinkler liig $3 \cdot 2R$, men Summen af de tre indvendige er liig 2R, altsaa Summen af de tre udvendige Vinkler $a + b + c = 4R$.

Fig. 38. IX. Naar Linien AC, idet den dreier sig om Punktet A, viger mere og mere ud fra Perpendiculæren AB, da aftager stedse

Vinklen C, saaledes $\angle D < C$; thi det er indlysende at Complementerne BAC, BAD, ꝛc. tage til.

X. I en $\triangle$ ACE, hvor Vinklerne ved Basis CE ere spidse, falder Perpendiculæren AB, fældet fra Toppunktet A ned paa Basis, inden i Trianglen; thi hvis den laae udenfor, som AD, da havde $\triangle$ ACD en stump Vinkel C og en ret Vinkel D. Af samme Grund falder Perpendiculæren AB udenfor en Triangel ACD, der har en stump Vinkel ved Basis. Fig.33.

XI. Har en Vinkel sine Been perpendiculær paa en anden Vinkels Been, da ere disse Vinkler ligestore, naar de ere eensartede, men Supplementer naar de ere ueensartede (den ene spids, den anden stump).

Naar HD $\perp$ AC, og FE $\perp$ AB, da ere Trianglerne ADI og HEI retvinklede, altsaa ere Vinklerne m og n Complementer til u og z, men $\angle u = z$, altsaa 1° er $\angle m = n$, og, da $\angle x$ er Supplement til n, saa 2° er $\angle x$ Supplement til $\angle m$. Fig.51.

46— Opg. Naar to Vinkler m og n i en Triangel ere givne, da at finde den tredie. Fig.52.

Man drager en ret Linie AE, afsætter i et Punkt B, i denne Linie, en Vinkel ABC $= m$; og paa BC, i samme Punkt B, en anden Vinkel CBD $= n$. Vinklen DBE er den søgte tredie Vinkel; thi den er Supplement til $\angle$ ABC + CBD $= m + n$.

47— Opg. At construere en Triangel, naar man har givet to Sider a og b, samt Vinklen A′, der ligger overfor Siden a.

Der ere to Tilfælde:

1° At Vinklen A′ er ret eller stump. Fig.53.

Man construerer en Vinkel CAB $=$ A′, og tager AC $= b$. Fra Punktet C, som Centrum, med en Radius CB $= a$, beskriver man en Bue, der skjærer AB i et Punkt B, og drager CB. Den forlangte Triangel er ABC.

I dette Tilfælde bør Siden a være $> b$; thi $\angle$ A', som er ret eller stump, er den største Vinkel i Trianglen; altsaa bør dens modstaaende Side a være den største Side.

Fig. 54. 2º Naar $\angle$ A' er spids, og Siden $a > b$, saa giver samme Construction ikkun den ene Triangel ABC.

Fig. 55. Naar $\angle$ A' er spids, men Siden $a < b$, da vil Buen, beskrevet fra Centret C, med Radius CB $= a$, skjære Linien AB i to Punkter B og B', der begge ligge til samme Side af A, og man finder derfor to Triangler ABC og AB'C, der begge fyldestgjøre Opgaven.

Anm. Opløsningen er, i ethvert Tilfælde, umulig, naar Siden a er mindre end Perpendiculæren fældet fra Punktet C ned, paa AB.

48. Opg. At construere en retvinklet Triangel, naar man har givet Hypotenusen og Summen eller Differensen af Catheterne.

Fig. 55. Forlængrer man, ved en retvinklet Triangel ACD, en Cathete AD, tager DB $=$ DC $=$ DB', og drager CB og CB', saa er AB liig Summen af Catheterne AD $+$ DC, og AB' liig Differensen AD $-$ DC; fremdeles have de retvinklede ligebenede Triangler BCD og B'CD, Vinklen B $=$ CB'D $= \frac{1}{2}$R (Nº 27 og 45, IV); altsaa 1º naar Hypotenusen h, og Summen af Catheterne s ere givne, da kjender man i $\triangle$ ABC Vinklen B $= \frac{1}{2}$R, den hosliggende Side AB $= s$, og den modstaaende Side AC $= h$. Vi kunne altsaa let construere denne Triangel; men, da $\angle$ B er spids, og $h < s$, saa vil (Nº 47, 2º) Radius AC skjære BC' i to Punkter C og C'; altsaa finder man to Triangler ABC og ABC', og, fældes fra disse Trianglers Toppunkter C og C' til Basis AB Perpendiculærerne CD og C'B', da ere de retvinklede Triangler ACD og AC'B' to Opløsninger af Problemet. 2º Naar Hypotenusen h og Catheternes Differens d ere givne, da kjender man i $\triangle$ AB'C Vinklen AB'C $=$ 2R $- \frac{1}{2}$R $= \frac{3}{2}$R, den hosliggende Side AB' $= d$,

og den modstaaende Side AC = h. Da Vinklen AB'C er stump, saa giver Constructionen (No. 47, 1°) ikkun een Triangel AB'C; altsaa er den retvinklede Triangel ACD den eneste Opløsning.

Anm. Ved at sammenstille de forskjellige Sætninger om Trianglernes Congruents finde vi: at to Triangler ere, i Almindelighed, congruente, naar af den ene Triangels 6 Stykker (tre Sider og tre Vinkler) de tre, hvoriblandt i det mindste een Side, ere lig de samme Stykker i den anden Triangel; men, at 1° naar to Vinkler ere givne, da bør de, i begge Triangler, have samme Beliggenhed mod den givne Side, og 2° naar to Sider og den spidse Vinkel, der ligger overfor den mindste af disse to Sider, ere givne, da bør den anden givne Sides modstaaende Vinkel være af samme Art i begge Triangler.

Paralleler.

49— To rette Linier, i samme Plan, siges at være parallele, naar de ikke træffe sammen, hvorlangt de end forlængres.

Parallel med betegnes ved ≠

50— Naar to rette Linier AB og CD ere perpendiculære paa en tredie FG, da ere disse to Linier parallele. Fig. 56.

Thi, hvis de traf sammen i et Punkt O, da vare to Perpendiculærer OG og OF nedfældede fra eet Punkt O til een ret Linie GF, hvilket er umuligt (No. 35).

51— Skjæres to Paralleler AB og A'B' af en ret Linie CD, da kaldes denne en Secant. Fig. 57.

For de 8 Vinkler, der ligge ved Secanten, har man antaget følgende Benævnelser: man kalder to Vinkler, af hvilke een ligger ved hver Parallel,

1° Indvendige Vinkler, naar de ligge mellem Parallelerne, paa samme Side af Secanten (a, a'), (b, b').

2° Udvendige Vinkler, naar de ligge udenfor Parallelerne, paa samme Side af Secanten (c, c'), (d, d').

3º Indvendige Vexelvinkler, naar de ere indvendige, paa modsatte Sider af Secanten (a, b'), (b, a').

4º Udvendige Vexelvinkler, naar de ere udvendige, paa modsatte Sider af Secanten (c, d'), (d, c').

5º Eensbeliggende Vinkler, naar den ene er indvendig, den anden udvendig, men begge ligge paa samme Side af Secanten (a, c'), (c, a'), (b, d'), (d, b').

Fig. 56. 52— Skjæres to rette Linier AB og CD af en tredie EF, og Summen af to indvendige Vinkler BEF og DFE er lüg 2R, da ere Linierne AB, CD parallele.

Dersom Vinklerne BEF og DFE vare ligestore, saa vare de begge rette, og altsaa, ifølge Sætningen Nº 50, AB $\neq$ CD; men antag at de ere uligestore, og fæld fra den Störstes Toppunkt F en Perpendiculær FG ned paa AB.

I den retvinklede Triangel EFG er Summen af de to spidse Vinkler $a + b = R$ (Nº 45, IV), og, efter Hypothesen, er $\angle$ BEF + DFE eller $\angle a + b + c = 2R$, altsaa $\angle c = R$. Linierne AB og CD ere altsaa perpendiculære paa een og samme ret Linie FG; følgelig (Nº 50) ere de parallele.

Fig. 58. 53— Skjæres to rette Linier AB og CD af en tredie EF, og Summen af de to indvendige Vinkler BEF + DFE er $<$ eller $>$ 2R, da ville Linierne AB og CD, naar de tilstrækkeligen forlængres, træffe sammen.

1º Antag at Summen af Vinklerne BEF + EFD $<$ 2R. Drages Linien FG saaledes, at $\angle$ EFG = AEF, saa er Summen $\angle$ BEF + EFG = BEF + AEF = 2R og, da $\angle$ BEF + EFD $<$ 2R, saa maae den rette Linie DF ligge inden i $\angle$ EFG.

Drages fra Punktet F en skraa Linie FM, der træffer AB i et Punkt M, saa er $\angle$ AMF = GFM; thi lægges, til hver især, samme Størrelse $\angle$ EFM + FEM, saa faaer man to Summer, der hver især er lüg 2R. Tager man derpaa MN = FM, og drager FN, saa har man, ved den ligebenede Triangel MFN,

$\angle$ AMF $=$ MFN $+$ MNF (Nº 45, VII), men $\angle$ MFN $=$ MNF (Nº 27), altsaa $\angle$ AMF ($=$ MFG) $=$ 2MFN; altsaa deler Linien FN Vinklen GFM i to ligestore Dele, og træffer Linien AB i et Punkt N, der ligger i en Afstand MN $=$ FM fra Punktet M.

Af samme Beviis følger, at, ved at tage NP $=$ FN, bestemmer man i Linien AB et Punkt P, i hvilket den træffes af den rette Linie FP, der danner $\angle$ GFP $= \frac{1}{2}$ GFN $= \frac{1}{4}$ GFM.

Man kan altsaa efterhaanden tage $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, 2c. af $\angle$ GFM: man bestemmer nemlig Punkterne N, P, Q, 2c., i hvilke Delingslinierne træffe Linien AB, ved at tage MN $=$ FM, NP $=$ FN, PQ $=$ FP, 2c. Hvert af disse Punkters Afstand fra Punktet F er mindre end det dobbelte af det foregaaende Punkts Afstand, f. Ex. FN $<$ FM $+$ MN eller FN $<$ 2FM, ligedan FP $<$ 2FN, FQ $<$ 2FP, 2c.

Ved saaledes at dele Vinklen GFM vil man omsider komme til en Vinkel GFZ, der er mindre end den givne Vinkel GFD, og Linien FZ vil, forlængret, træffe Linien AB i et alt bestemt Punkt; altsaa maa og Linien FD, der ligger inden i Vinklen EFZ, træffe AB.

2º Antag at Summen af Vinklerne AEF $+$ CFE $>$ 2R. Forlængrer man AE mod B og CF mod D, saa er Summen af de 4 Vinkler AEF $+$ BEF $+$ CFE $+$ DFE $=$ 4R, men AEF $+$ CFE $>$ 2R, altsaa $\angle$ BEF $+$ DFE $<$ 2R; altsaa, ifølge forrige Tilfælde, ville Linierne AB og CD, naar de tilstrækkelig forlængres, træffe sammen.

Følg. Gjennem et givet Punkt F kan ikkun een ret Linie drages parallel med en given Linie AB; thi drages fra F til AB en Linie FE, da gives der kun een Linie FG, som opfylder den Betingelse, at Summen af de to indvendige Vinkler BEF $+$ EFG $=$ 2R. Enhver anden ret Linie FD vilde give Summen af de to Vinkler BEF $+$ EFD $<$ eller $>$ 2R, og følgelig denne Linie træffe sammen med AB.

Fig. 57. 54— Skjæres to Paralleler AB og A'B' af en Secant CD, da er Summen af de to indvendige Vinkler $a + a' = 2R$.

Thi var denne Sum større eller mindre end 2R, da vilde de to rette Linier AB og A'B' træffe sammen, til den ene eller den anden Side af Secanten (Nº 53), og vare altsaa ikke paralleler.

Følg. I. Naar Vinklen a er ret, da er ogsaa Vinklen a' ret; altsaa enhver Linie, der er perpendiculær paa den ene af to Paralleler, er ogsaa perpendiculær paa den anden.

II. Naar to Paralleler AB og A'B' skjæres af en Secant, da er endvidere 1º Summen af de to udvendige Vinkler $c + c' = 2R$. Thi Summen af de to Par Jevnsidesvinkler $c + a + a' + c' = 4R$, men Summen af de to indvendige Vinkler $a + a' = 2R$, altsaa er Summen af de to udvendige Vinkler $c + c' = 2R$.

2º To indvendige Vexelvinkler a og b' ere ligestore. Thi Summen af de to indvendige Vinkler a og a', saavelsom Summen af Jevnsidesvinklerne a' og b' er liig 2R, altsaa, naar fra hver af disse to ligestore Summer drages $\angle a'$, saa haves $\angle a = b'$.

3º To udvendige Vexelvinkler c og d' ere ligestore. Thi hver især er Topvinkel til een af de ligestore indvendige Vexelvinkler b og a'.

4º To eensbeliggende Vinkler a og c' ere ligestore. Thi de udvendige Vexelvinkler d og c' ere ligestore, og $\angle d$ liig sin Topvinkel a, altsaa $\angle a = c'$.

Altsaa ere de fire spidse Vinkler ligestore, $c = b = a' = d'$, ligedan de fire stumpe Vinkler, $d = a = b' = c'$, og Summen af een spids og een stump Vinkel liig 2R f. Ex. $c + d = 2R$ som Jevnsidesvinkler.

III. Og omvendt: to rette Linier AB og A'B', der skjæres af en tredie CD, ere parallele, naar:

1º Summen af to udvendige Vinkler c og c' er liig 2R. Thi Summen af de to Par Jevnsidesvinkler $c + a + a' + c' = 4R$, men, efter Hypothesen er $c + c' = 2R$, altsaa er Summen af de to indvendige Vinkler $a + a' = 2R$, og følgelig (Nº 52) Linien $AB \neq A'B'$.

2º Naar to indvendige Vexelvinkler a og b' ere ligestore. Thi Summen af de to Jevnsidesvinkler $b' + a' = 2R$, men, efter Hypothesen, er $\angle b' = a$, altsaa $\angle a + a' = 2R$ og følgelig $AB \neq A'B'$.

3º Naar to udvendige Vexelvinkler c og d' ere ligestore. Thi af $\angle c = d'$, og $\angle d' = a'$, som Topvinkler, følger $\angle c = a'$, men $\angle a + c = 2R$, altsaa $\angle a + a' = 2R$, og følgelig $AB \neq A'B'$.

4º Naar to eensbeliggende Vinkler a og c' ere ligestore. Thi $\angle c' + a' = 2R$, men, efter Hypothesen, er $\angle c' = a$, altsaa $\angle a + a' = 2R$, og følgelig $AB \neq A'B'$.

55— Opg. Gjennem et givet Punkt C at drage en ret Linie parallel med en given Linie AB. Fig. 59.

Man drager fra Punktet C en ret Linie CB, der træffer sammen med AB, og afsætter i C, paa CB, en Vinkel BCD = CBA. Linien CD er den forlangte Parallel; thi den gaaer igjennem Punktet C, og, da de indvendige Vexelvinkler BCD og CBA ere ligestore, saa er $CD \neq AB$.

56— Opg. At finde den Vinkel, som de to Linier AB og CD vilde danne med hinanden, uden at forlængre dem. Fig. 58.

Man drager gjennem et Punkt F, i den ene Linie CD, en Linie FG parallel med den anden givne Linie AB. Vinklen GFD er liig den søgte Vinkel, thi disse to ere indvendige Vexelvinkler (Nº 54, II.)

57— Opg. Gjennem et givet Punkt C, udenfor en ret Linie AB, at drage en ret Linie, der med AB danner en given Vinkel A'. Fig 60.

Man afsætter paa AB, i et hvilketsomhelst Punkt A, en Vinkel DAB = A' (№ 31), og drager gjennem Punktet C en ret Linie CE ≠ DA (№ 53). Denne Linie CE vil da med AB danne en Vinkel CEB = A'; thi ∠ CEB = DAB, som eensbeliggende Vinkler ved Parallelerne CE og DA (№ 54, II.), og ∠ DAB = A', ifølge Constructionen, altsaa ∠ CEB = A'.

Fig. 61. 58— Opg. **Gjennem et givet Punkt I i Aabningen af en given Vinkel ACB, at drage en ret Linie, der skjærer begge Benene i ligestor Afstand fra Toppunktet C.**

Man forlængrer eet af Benene, f. Ex. AC mod D, drager gjennem Punktet C en Linie CE, der halverer Vinklen BCD (№ 45), og igjennem Punktet I en ret Linie AB ≠ CE. Linien AB skjærer den givne Vinkels Been i to Punkter A og B, der ligge ligelangt fra Toppunktet C. Thi ved Trianglen ABC er den udvendige Vinkel BCD liig Summen af de to indvendige modstaaende Vinkler A og B, men ∠ A = *m* = $\frac{1}{2}$BCD, thi ∠ A og *m* ere eensbeliggende ved Parallelerne AB og CE, og Linien CE halverer Vinklen BCD, altsaa er ∠ A = B, og følgelig deres modstaaende Sider BC og AC ligestore (№ 28).

Fig. 62. 59— **Naar to Linier AB og CD ere, hver især, parallele med en tredie EF, da ere disse to Linier parallele.**

Drag Secanten PQR ⊥ EF. Da Linien AB er ≠ EF, saa er (№ 54, I.) Secanten PR ⊥ AB, og da Linien CD er ≠ EF, saa er ogsaa PR ⊥ CD. Altsaa ere Linierne AB og CD perpendiculære paa een og samme ret Linie PQ, og følgelig (№ 50) er AB ≠ CD.

Fig. 63. 60— **Naar ved to Vinkler ABC og DEF den Enes Been ere parallele med den Andens Been, og Aabningerne vende til samme Side, da ere disse Vinkler ligestore.**

Thi ∠ ABC = DHC, fordi AB er ≠ DE (№ 54, II, 4°), og ∠ DHC = DEF, fordi BC er ≠ EF, altsaa ∠ ABC = DEF.

Anm. Denne Sætning betinger, at Vinklerne vende Aab-

ningerne til samme Side; thi forlængres FE mod G, saa har man to Vinkler DEG og ABC, hvis Been ere parallele og hvis Aabninger vende til modsatte Sider, men disse Vinkler ere Supplementer til hinanden.

61— Naar to Paralleler AB og CD skjæres af to Fig.64.
andre Paralleler AC og BD; da ere de Stykker ligestore, der ligge mellem to Paralleler; og omvendt naar Stykket AB er = CD, og Stykket AC = BD, da er Linien AB ≠ CD, og Linien AC ≠ BD.

1º Drages Linien BC, saa har man to Triangler ABC og DCB, i hvilke BC er en fælleds Side, ∠ $m = n$, fordi AB er ≠ CD (Nº 54, II, 2º), og ∠ $x = y$, fordi AC er ≠ BD, følgelig (Nº 22, Følg.) er Siden AB = CD, og Siden AC = BD.

2º Og omvendt: naar AB er = CD, og AC = BD, saa er, da den tredie Side BC er fælleds, △ ABC ≅ DCB, altsaa ∠ $m = n$, og ∠ $x = y$, følgelig (Nº 54, III, 2º) Linien AB ≠ CD, og Linien AC ≠ BD.

Anm. Man beviser ligedan, at naar AB er = og ≠ CD, da er ogsaa AC = og ≠ BD; thi af AB ≠ CD følger, at ∠ $m = n$; altsaa have Trianglerne ABC og DCB en ligestor Vinkel; de have endvidere en fælleds Side BC og Siden AB = CD, efter Forudsætningen, altsaa (Nº 22, Følg.) er Siden AC = BD, og ∠ $x = y$, hvoraf følger (Nº 54, III, 2º), at Linien AC er ≠ BD; altsaa er AC = og ≠ BD.

62— To Paralleler ligge overalt ligelangt fra hinanden.

Antag AB ≠ CD. Opreises paa AB i hvilkesomhelst to Punk- Fig.65.
ter E og F Perpendiculærerne EG og FH, da ere de ogsaa perpendiculære paa CD, og udmaale altsaa Afstanden mellem Parallelerne. Disse Linier EG og FH ere parallele (Nº 50) og, da de ligge mellem Paralleler, saa ere de ligestore (Nº 61); altsaa ligge to Paralleler overalt ligelangt fra hinanden.

II. Cirkellinien
i Forbindelse med den rette Linie.

63— **En Cirkellinie kan ikke skjæres i flere end to Punkter af en ret Linie.**

Thi, hvis den rette Linie havde tre Punkter tilfælleds med Cirkellinien, da laae disse tre Punkter i samme Afstand fra Centret (No 2, VII), og altsaa skulde fra eet Punkt til een ret Linie kunne drages tre ligestore rette Linier, hvilket er umuligt (No 36, II).

Anm. Cirkellinien er altsaa en convex Curve, og Cirklen en convex Figur (No 20, I, II).

Fig. 66. 64— I. En Secant er en ret Linie AD, der skjærer en Cirkellinie i to Punkter A og E.

II. En Chorde er en ret Linie AE, hvis Endepunkter ligge i en Cirkellinie.

Anm. Til en Chorde AE svare to Buer AME og ANE, hvilke tilsammen udgjøre den hele Peripherie, men i det Følgende er Talen stedse om den mindste Bue, naar ikke det Modsatte udtrykkelig nævnes.

III. En Diameter er en igjennem Centret gaaende Chorde, f. Ex. AB.

Alle Diametre i samme Cirkel ere ligestore, og dobbelt saa store som Radius; thi hver især er sammensat af to Radier, og disse ere ligestore (No 19, II).

IV. Et Segment er et Cirkelstykke AMEA begrændset af en Bue og den tilsvarende Chorde.

V. En Sector er et Cirkelstykke ACEMA begrændset af en Bue og to Radier, dragne til Buens Endepunkter.

65— **Diameteren er den største Chorde.**

Thi enhver anden Chorde AE er mindre end Summen af to Radier AC + CE (No 23), der er liig Diameteren AB.

66— Cirkler beskrevne med samme Radius ere congruente.

Bringes den ene Cirkel med sit Centrum paa den andens Centrum, da dække Peripherierne hinanden; thi hvis det ikke fandt Sted, da vare der, i den ene eller den anden Peripherie, Punkter der laae i forskjellige Afstande fra Centret, hvilket er umuligt (№ 2, VII).

67— Naar en hvilkensomhelst Bue bringes saaledes paa en anden Bue, beskreven med samme Radius som den første, at de have to fælleds Punkter, og ere convexe mod samme Side, da falde de overalt sammen, d. v. s. de udgjøre da kun een Bue.

Bringes Buen A′D′ saaledes paa Buen AD, at to Punkter A′ og B′ i den første Bue falde paa to Punkter A og B i den anden, saa dække Chorderne A′B′ og AB hinanden, og, da Radierne A′C′ og B′C′ ere liig Radierne AC og BC, saa falder Punktet C′ i C (№ 26); altsaa bør Buerne overalt falde sammen, thi alle Punkter i den ene Bue ligge i samme Afstand fra Centret C som alle Punkter i den anden. Fig. 67.

Følg. I. Ligestore Buer i samme Cirkel eller i Cirkler beskrevne med samme Radius ere congruente. Thi bringes Buen A′D′ paa Buen AD med Endepunktet A′ i A, og et andet Punkt B′ i B, da falde disse to Buer overalt sammen, og ere de nu ligestore, da falder det andet Endepunkt D′ i D; altsaa dække Buerne hinanden.

II. Til ligestore Buer, i samme Cirkel eller i Cirkler beskrevne med samme Radius, svare ligestore Chorder; og omvendt, forudsat at begge Buerne ere mindre, eller begge større end den halve Peripherie.

Thi 1º dække Buerne hinanden, da have Chorderne fælleds Endepunkter, og ere altsaa ligestore; 2º dække Chorderne hinanden, da have Buerne fælleds Endepunkter, altsaa, da de ere beskrevne med samme Radius, dække de hinanden.

III. To Segmenter i samme Cirkel eller i Cirkler beskrevne med samme Radius ere congruente, naar Buerne ere ligestore, eller Chorderne ere ligestore, forudsat at begge Buerne ere mindre, eller begge større end den halve Peripherie.

Thi 1º Have Segmenterne ADBA og A′D′B′A′ Buen AD = A′D′, og disse Buer bringes til Dækning, da maae ogsaa Chorderne dække hinanden; altsaa dække Segmenterne hinanden. 2º Naar Chorden AD = A′D′, og disse bringes til Dækning, da maae ogsaa Buerne dække hinanden; altsaa dække Segmenterne hinanden.

Fig. 66. IV. Diameteren AB deler saavel Cirklen som Peripherien i to congruente Dele.

Thi bringes Segmenterne ABM og ABN saaledes paa hinanden, at Diameteren er en fælleds Side, da maae Buerne AMB og ANB dække hinanden; altsaa ere Segmenterne ABM og ABN congruente.

68— I een Cirkel eller i Cirkler beskrevne med samme Radius svarer til en større Bue en større Chorde; og omvendt, forudsat, i ethvert Tilfælde, at de sammenlignende Buer ere mindre end den halve Peripherie.

Fig. 67. Drages til de to uligestore Buer AD > AB Chorderne AD og AB, samt Radierne AC, BC og DC, saa har man i △ ACD to Sider AC, DC, der ere liig to Sider AC, BC i △ ACB, men ∠ ACD > ACB, altsaa (Nº 25) er den tredie Side AD > AB; altsaa svarer til en større Bue en større Chorde.

Og omvendt naar Chorden AD > AB, da slutter man fra de samme Triangler, at ∠ ACD er > ACB, altsaa ⌒ AD > AB.

Fig. 68. Anm. Vi forudsætte at Buerne ere mindre end den halve Peripherie; thi ere de større, som Buerne ANEM og ANE, da er Chorden AM, der svarer til den større Bue, mindre end Chorden AE, der svarer til den mindre Bue.

[illegible]. Opg. At finde Forholdet mellem to givne Buer, i samme Cirkel eller Cirkler beskrevne med samme Radius.

Istedetfor at bringe Buerne paa hinanden, føres den Enes Chorde om paa den anden Bue, hvilket giver samme Resultat, thi ligestore Chorder svare til ligestore Buer (N°. 67, II).

Lad AB og CD være de to givne Buer. Fig. 68.

Man fører Chorden til den mindste Bue CD saamange Gange om paa den første Bue AB som muligt. Man finder f. Ex. to Gange og Resten EB.

Man fører Chorden til Resten EB om paa Buen CD, og finder f. Ex. een Gang og Resten FD.

Man fører Chorden til den anden Rest FD om paa den første Rest EB, og finder f. Ex. een Gang samt Resten GB.

Man fører dernæst Chorden til den tredie Rest GB paa den anden FD o. s. f. indtil man finder en Rest, der indeholdes nøie et Antal Gange i den foregaaende.

Den sidste Rest er Fælledsmaalet for de to givne Buer, hvis Forhold da letteligen udledes af de fundne Qvotienter.

Finder man f. Ex. at Chorden til Buen GB, naar den omføres paa Buen FD, deler denne i to ligestore Dele, da er GB de to givne Buers Fælledsmaal.

Sættes Buen $GB = 1$, saa er $\frown FD = 2$; man fandt $\frown EB = FD + GB$, altsaa $\frown EB = 3$, fremdeles var $\frown CD = EB + FD$, altsaa $\frown CD = 5$, og endelig $\frown AB = 2CD + EB$, altsaa $\frown AB = 13$; følgelig $\frown AB : \frown CD = 13 : 5$. Tages CD til Eenhed, saa er $AB = \frac{13}{5}$, og tages AB til Eenhed, da er $CD = \frac{5}{13}$.

Det er muligt at, hvorlangt Undersøgelsen end fortsættes, man aldrig finder en Rest, der nøie indeholdes i den foregaaende, i hvilket Tilfælde de givne Buer ikke have noget Fælledsmaal. Men omendskjønt Forholdet isaafald er uangiveligt i Tal, saa er det dog stedse muligt ved behørigen at fortsætte Operationen, at

udtrykt et Forhold, der afviger mindre end ethvert givet Tal fra det sande Forhold.

Anm. Vi kunne nu ligedan, ved Hjelp af Chorderne, addere eller subtrahere Buer, beskrevne med samme Radius, eller multiplicere en Bue med et givet Tal.

Fig. 66. 70. En Radius CN, der er perpendiculær paa en Chorde FG, deler saavel denne Chorde som den tilsvarende Bue FNG i to ligestore Dele.

Radierne CF og CG ere, med Hensyn til Perpendiculæren CI, to ligestore skraa Linier, og vige altsaa ligemeget ud fra Perpendiculæren (Nº 36); altsaa er FI = IG.

Da FI er = IG, saa er ethvert Punkt i Perpendiculæren CN ligelangt fra Punkterne F og G (Nº 37). Nu er N eet af disse Punkter, altsaa er Afstanden NF = NG; men naar Chorden NF er liig Chorden NG, da er (Nº 67, II), ⌒NF liig ⌒NG; altsaa deler Radius CN, der er perpendiculær paa Chorden FG, denne Chordes tilsvarende Bue FNG i to ligestore Dele.

Følg. I. Centret C, Midtepunktet I i Chorden FG, og Midtepunktet N i denne Chordes tilsvarende Bue FNG, ere tre Punkter beliggende i een ret Linie perpendiculær paa Chorden; men to Punkter ere tilstrækkelige til at bestemme en ret Linies Beliggenhed; altsaa maae enhver ret Linie, der gaaer igjennem to af de nævnte Punkter, ogsaa gaae igjennem det tredie, og tillige være perpendiculær paa Chorden.

II. Af denne Sætning følger ogsaa, at Perpendiculæren opreist paa Midten af en Chorde gaaer igjennem Centret, og igjennem Midten af denne Chordes tilsvarende Bue.

Thi denne Perpendiculær er den samme som den, der nedfældes fra Centret paa Chorden, fordi de begge gaae igjennem denne Chordes Midtepunkt.

Da Linien NM er en Diameter, saa er (№ 67, IV), ⌒ NFM = NGM og, da ⌒ NF = NG, saa er altsaa ⌒ FM = GM; altsaa deler Perpendiculæren opreist paa Midten af en Chorde begge de tilsvarende Buer FNG og FMG i to ligestore Dele.

III. Vi kunne altsaa dele en given Bue i to ligestore Dele, ved at opreise en Perpendikulær paa Midten af denne Bues tilsvarende Chorde; thi denne Perpendiculær gaaer igjennem Buens Midtepunkt; og da vi paa samme Maade kunne halvere disse to Dele, saa ere vi istand til at dele en given Bue i 2, 4, 8,...2^n ligestore Dele.

71— *Gjennem tre givne Punkter A, B, C, der ikke ligge i een ret Linie, kunne stedse føres en Cirkellinie, men ikkun een.* Fig. 69.

Forenes AB og BC, og disse to rette Linier deles i to ligestore Dele ved Perpendiculærerne DE og FG, da skjære disse Perpendiculærer hinanden i et Punkt O.

Thi Linierne DE og FG maae nødvendigen skjære hinanden, naar de ikke ere parallele. Men lad os antage, at de kunne være parallele, da var Linien AB, der er ⊥ DE, ogsaa ⊥ FG, (№ 54, I), og altsaa K en ret Vinkel; men BK, Forlængringen af AB, er forskjellig fra BF, fordi de tre Punkter A, B og C ikke ligge i een ret Linie, altsaa vilde der være to Perpendiculærer BF, BK fældede fra eet Punkt ned paa een ret Linie, men dette er umuligt (№ 35); altsaa maae Perpendiculærerne DE og FG skjære hinanden i et Punkt O.

Fremdeles ligger Punktet O, som henhørende til Perpendiculæren DE, ligelangt fra begge Punkterne A og B (№ 37), og, som henhørende til Perpendiculæren FG, ligelangt fra begge Punkterne B og C; altsaa ere de tre Afstande OA, OB og OC ligestore, og følgelig maae en Cirkellinie, beskrevet fra Centret O med Radius OB, gaae gjennem de tre givne Punkter,

Det er saaledes beviist, at man stedse kan føre en Cirkellinie gjennem tre givne Punkter, der ikke ligge i een ret Linie; det skulde nu godtgjøres, at ikkun een Cirkellinie opfylder denne Betingelse.

Hvis en anden Cirkellinie kunne gaae gjennem de tre givne Punkter A, B og C, da kunne dens Centrum ikke være udenfor Linien DE (№ 37); thi var det Tilfældet, da laae det ikke ligelangt fra A og B; og af samme Grund kan det heller ikke ligge udenfor Linien FG, altsaa ligger det i begge Linierne DE og FG; men to rette Linier skjære hinanden kun i eet Punkt, altsaa har denne Cirkellinie samme Centrum O, og samme Radius som den første: den kunne derfor umuligen være forskjellig fra denne; altsaa kunne ikkun een Cirkellinie føres gjennem tre givne Punkter.

Følg. To Cirkellinier kunne ikke skjære hinanden i flere end to Punkter, thi, hvis de havde tre fælleds Punkter, da havde de samme Centrum, og vare da kun een og samme Cirkellinie.

72— En Polygon er indskreven i en Cirkel, naar alle Vinkelspidserne ligge i Peripherien, og altsaa alle Siderne ere Chorder. Cirklen siges i dette Tilfælde at være omskreven.

Fig.70. 73— Opg. At beskrive en Cirkel om en given Triangel ABC.

Man opreiser paa Midten af Siden AB og paa Midten af Siden BC Perpendiculærerne EF og GH (№ 38), og beskriver fra disse to Liniers Skjærepunkt O som Centrum, med Radius OA, en Cirkellinie; denne er den forlangte.

Thi den gaaer gjennem Trianglens tre Vinkelspidser, Punkterne A, B og C (№ 71).

Anm. Da ogsaa Perpendiculæren DO, opreist paa Midten af Chorden AC, gaaer gjennem Centret O, saa støde altsaa de tre Perpendiculærer, opreiste paa Midten af en Triangels tre Sider, sammen i eet Punkt, der er Centret til den omskrevne Cirkel.

74— Opg. At beskrive en Cirkel, i hvilken to givne Linier *a* og *b* ere Chorder, den første til en dobbelt saa stor Bue som den anden. Fig.66.

Man drager en ret Linie FG = *a*, beskriver fra Punkterne F og G, med samme Radius lig *b*, to Buer, der skjære hinanden i et Punkt N, og fører derpaa en Cirkellinie gjennem de tre Punkter F, G og N (Nº. 73). Den beskrevne Cirkel FNGM er den forlangte.

Thi i denne er Chorden FG = *a*, Chorden FN = *b*, og, da Punktet N, ifølge Constructionen, ligger lige langt fra Punkterne F og G, saa er Chorden FN liig Chorden NG, altsaa ⌒FN = ⌒NG, og følgelig er Buen FN, der svarer til Chorden FN = *b*, halv saa stor som Buen FNG, der svarer til Chorden FG = *a*.

75— Opg. At finde Centret til en given Cirkel eller given Bue.

Man tager hvilkesomhelst tre Punkter A, B og C i Cirkellinien eller Buen, forbinder, eller tænker sig at man forbinder, AB og BC, og opreiser Perpendiculærerne EF og GH paa Midten af Chorderne AB og BC. Disse to Perpendiculærers Skjærepunkt O er det søgte Centrum (Nº. 70, II). Fig.70.

76— To ligestore Chorder ligge ligelangt fra Centret, men af to uligestore Chorder ligger den mindste længere fra Centret end den anden.

1º Antag Chorden AB = DE, halveer disse to Chorder ved Perpendiculærerne CF og CG, og drag Radierne CA og CD. Fig.71.

De retvinklede Triangler ACF og DCG have ligestore Hypotenuser AC, DC, og Cathetén AF = DG, som Halvdele af de ligestore Chorder AB, DE, altsaa (Nº. 43) ere disse Triangler congruente, og følgelig den anden Cathete CF = CG; altsaa ligge to ligestore Chorder AB, DE ligelangt fra Centret.

2º Antag Chorden AH > DE, altsaa ⌒AKH > DME. Tag paa Buen AKH Stykket ANB = DME, drag Chorden

AB, og fæld fra Centret C Linien CF ⊥ AB og CI ⊥ AH, saa er CF > CO og CO > CI (№ 36), altsaa CF > CI, men CF = CG, fordi Chorderne AB og DE ere ligestore, altsaa er CG > CI; altsaa af to uligestore Chorder ligger den mindste længere fra Centret end den anden.

Fig. 72. 77— En ret Linie BD, der berører d. e. som har ikkun eet Punkt A tilfælleds med en Cirkellinie, kaldes en **Tangent**. Fællesdspunktet A er Tangentens **Berøringspunkt**. Man siger ogsaa, i dette Tilfælde at **Cirklen** berører (tangerer) den rette Linie BD i Punktet A.

En Polygon er **omskreven**, naar alle Siderne ere Tangenter til en Cirkel. Denne siges isaafald at være **indskreven** i Polygonen.

78— **Perpendiculæren** BD, opreist paa **Enden** af en **Radius** CA, er en **Tangent**, og **omvendt**: en **Radius** draget til **Berøringspunktet** A er **perpendiculær** paa **Tangenten**.

Da enhver skraa Linie CE er længere end Perpendiculæren CA (№ 36), saa ligger Punktet E udenfor Cirklen; altsaa har Linien BD kun Punktet A tilfælleds med Cirkellinien; altsaa er BD en Tangent.

Anm. Gjennem et givet Punkt A i Cirkellinien kan ikkun een Tangent BD drages; thi hvis man kunne drage en anden, da var den ikke perpendiculær paa Radius CA (№ 35), altsaa, med Hensyn til denne ny Tangent, var Radius CA en skraa Linie, og følgelig længere end Perpendiculæren fældet fra Centrum ned paa denne Tangent; men da denne saaledes har et Punkt i kortere Afstand end Radius fra Centret, saa gaaer den igjennem Cirklen; altsaa er den en Secant, og ikke en Tangent.

Og omvendt, naar BD er en Tangent, da er Radius CA, draget til Berøringspunktet, perpendiculær paa BD.

Thi Tangenten og Cirkellinien have kun eet fælleds Punkt A, og ethvert andet Punkt i Tangenten ligger længere end dette

fra Centret; altsaa er Radius CA den korteste Linie man kan drage fra Centret til Tangenten, og følgelig (№ 36) er CA $\perp$ BD.

79— Opg. At beskrive en Cirkellinie, der skal berøre en given Linie DE i Punktet A og gaae gjennem et andet givet Punkt B, udenfor denne Linie. Fig.73.

Da Cirkellinien skal gaae gjennem de to givne Punkter A og B, saa er Linien AB en Chorde i samme, og altsaa ligger Centret i Perpendiculæren GH, opreist paa Midten af AB (№ 70, II); og da Cirkellinien skal berøre Linien DE i Punktet A, saa er DE en Tangent, altsaa ligger Centret i Perpendiculæren AF, opreist paa DE i Berøringspunktet A (№ 78); men naar Centret skal ligge i begge Linierne GH og AF, saa er det disse to Liniers Skjærepunkt C.

Altsaa forener man de to givne Punkter A og B, opreiser en Perpendiculær GH paa Midten af AB, og en anden paa DE i Punktet A, og beskriver fra de to Perpendiculærers Skjærepunkt C, med Radius CA, en Cirkellinie.

80— Naar to Paralleler skjære eller berøre en Cirkellinie, da ere de mellemliggende Buer ligestore.

Der ere tre Tilfælde:

1° Naar begge Paralleler, FG og HI ere Secanter. Fig.72. Drages Radius CA $\perp$ Chorden RS, da er den ogsaa $\perp$ paa dennes Parallel PQ (№ 54, I), og altsaa (№ 70) er Punktet A Midten af begge Buerne RAS og PAQ d. v. s. $\frown AR = AS$ og $\frown AP = AQ$, altsaa $\frown AR - AP = AS - AQ$, eller $\frown PR = QS$.

Saaledes og, naar Secanterne ligge paa modsatte Sider af Centret, som HI og KL; thi Diameteren AO $\perp$ KL er og $\perp$ RS $\neq$ KL, altsaa er A Midten af Buerne KAL og RAS, altsaa $\frown AK - AR = AL - AS$, eller $\frown RK = SL$.

2° Naar af de to Paralleler FG og BD, den ene er Secant, den anden Tangent. Drages Radius CA til Berørings-

punktet, da er den perpendiculær paa Tangenten BD altsaa og $\perp$ FG $\neq$ BD, men naar CA er $\perp$ Chorden PQ, da er Punktet A Midten af Buen PAQ, altsaa ere de mellem Parallelerne BD og FG liggende Buer PA og QA ligestore.

3º Naar begge Paralleler BD og MN ere Tangenter, den ene i A, den anden i O. Drages en Secant FG parallel med Tangenterne, da har man $\frown AP = AQ$ og $\frown PO = QO$, altsaa $\frown AP + PO = AQ + QO$ eller $\frown APO = AQO$. Man seer ogsaa heraf, at hver af disse Buer er den halve Peripherie, og at altsaa Linien AO, der forener begge Berøringspunkterne, er en Diameter.

Cirkelliniers indbyrdes Stilling.

81— To Cirkellinier ere concentriske naar de have samme Centrum, eccentriske naar de have forskjellige Centrer. **Eccentriciteten** er Afstanden mellem Centrerne. **Centrilinien** er en ret Linie, der gaaer igjennem Centrerne.

II. To Cirkellinier siges at berøre hinanden, naar de have kun eet Punkt tilfælleds.

82— **To concentriske Cirkellinier kunne ikke have noget Punkt tilfælleds.**

Thi hvis det fandt Sted, og man forenede dette Punkt med deres fælleds Centrum, da havde de en fælleds Radius, og altsaa skulde fra samme Centrum med samme Radius to forskjellige Cirkellinier kunne beskrives, hvilket er umuligt.

Anm. Det er altsaa kun to eccentriske Cirkellinier der kunne have enten eet fælleds Punkt d. e. berøre hinanden, eller to fælleds Punkter d. e. skjære hinanden. Flere end to Skjærepunkter kunne de ikke have (Nº 71, Følg.)

83— **Naar to Cirkellinier have et fælleds Punkt i Centrilinien, da berøre de hinanden.**

Der ere to Tilfælde:

1º At Centrerne C, c, ligge paa samme Side af Fælledspunktet A. Drages fra Centrerne til et hvilketsomhelst Punkt P i den ene Cirkellinie, Linierne CP og cP, da har man Cc + cP > CP, men CP = CA = Cc + cA, altsaa Cc + cP > Cc + cA, og følgelig cP > cA; altsaa ligger Punktet P udenfor Cirklen cA; altsaa have Cirkellinierne AMN og Amn kun Punktet A tilfælleds, eller de berøre kun hinanden. Fig.74.

2º At Centrerne C, c' ligge paa modsatte Sider af Fælledspunktet A. Man har her CP + Pc' > Cc' eller CA + Ac', men CP = CA, altsaa Pc' > Ac'; altsaa ligger Punkt P udenfor Cirklen c'A og Cirkellinierne AMN og A$m'n'$ have kun Punktet A tilfælleds, eller de berøre kun hinanden.

Følg. Alle de Cirkellinier, hvis Centrer ligger i Linien Cc', og som gaae gjennem Punktet A, have kun dette Punkt tilfælleds d. v. s. de berøre alle hinanden. Opreises paa Centrilinien, i Berøringspunktet A, en Perpendiculær AT, da er denne en Tangent til alle disse Cirkellinier (Nº 78).

84— **Naar to Cirkellinier PLM og P$l'm'$ have et fælleds Punkt P udenfor Centrilinien, da skjære de hinanden.** Fig.75.

Fæld fra Punktet P en Perpendiculær PN paa Centrilinien Cc' og tag IN = IP, saa er (Nº 36) CN = CP, altsaa er N et Punkt i Cirkellinien PLM (Nº 2, VII), og c'N = c'P, altsaa er N ogsaa et Punkt i Cirkellinien P$l'm'$; følgelig have Cirkellinierne to fælleds Punkter P og N, og skjære altsaa hinanden.

Følg. Naar to Cirkellinier berøre hinanden, da ligger Berøringspunktet i Centrilinien; thi hvis dette Punkt laae udenfor Centrilinien, da havde Cirkellinierne endnu eet fælleds Punkt, hvilket strider imod Hypothesen.

85— **Naar to Cirkellinier PLM og P$l'm'$ (eller Plm) skjære hinanden, da er Centrilinien perpendiculær paa**

Midten af deres fælleds Chorde PN, der forener Skjærepunkterne P og N.

Thi Perpendiculæren, opreist paa Midten af deres fælleds Chorde PN, bør gaae gjennem begge Centrerne C og c' (eller C og c) (Nº 70, II), men gjennem to givne Punkter kan kun een ret Linie drages, altsaa er Linien Cc', der gaaer gjennem begge Centrerne, perpendikulær paa Midten af den fælleds Chorde PN.

86— En Cirkel berører en anden indvendigen, naar Eccentriciteten er liig Radiernes Differens; de berøre hinanden udvendigen naar Eccentriciteten er liig Radiernes Sum.

Fig. 74. Thi 1º Naar Eccentriciteten Cc er liig Differensen mellem Radierne CA og cA, da indsees at Cirkellinierne AMN og Amn have et fælleds Punkt A i Centrilinien; men naar dette finder Sted, da have de intet andet fælleds Punkt, og altsaa berøre de hinanden (Nº 83).

2º Naar Eccentriciteten Cc' er liig Summen af Radierne CA og $c'A$, da indsees at Cirkellinierne AMN og $Am'n'$ have et fælleds Punkt A i Centrilinien, og altsaa berøre de hinanden.

Anm. Modsætningerne kunne let bevises 1º naar Cirklen Amn berører Cirklen AMN indvendigen, da ligger Berøringspunktet A i Centrilinien (Nº 84, Følg.), altsaa er Linien CcA en ret Linie, og følgelig er Eccentriciteten Cc liig Radiernes Differens $CA - cA$. 2º Naar Cirklerne AMN og $Am'n'$ berøre hinanden udvendigen, da ligger Berøringspunktet A i Centrilinien, altsaa er Eccentriciteten Cc' liig Radiernes Sum $CA + Ac'$.

Fig. 76. Følg. I. En Cirkel amn ligger aldeles indenfor Peripherien af en anden Cirkel AMN, naar Eccentriciteten Cc er mindre end Differensen mellem Radierne CA og ca; thi hvis man antog at den ene kunne berøre den anden indvendigen, da var $Cc = CA - ca$, hvilket strider imod Hypothesen.

Og omvendt naar en Cirkel amn ligger aldeles indenfor Periphérien af en anden Cirkel AMN, da er Eccentriciteten mindre end Radiernes Differens; thi man har her $Cc = CA - ca - aA$, altsaa $Cc < CA - ca$.

II. To Cirkler AMN og $a'm'n'$ ligge aldeles udenfor hinanden, naar Eccentriciteten Cc' er større end Summen af Radierne CA og $c'a'$; thi hvis man antog at de kunne berøre hinanden udvendigen, da var $Cc' = CA + a'c'$, hvilket strider imod Hypothesen.

Og omvendt naar to Cirkler AMN og $a'm'n'$ ligge aldeles udenfor hinanden, da er Eccentriciteten større end Radiernes Sum; thi man har her $Cc' = CA + Aa' + a'c'$ altsaa $Cc' > CA + a'c'$.

87— To Cirkler skjære hinanden naar Eccentriciteten er større end Radiernes Differens og mindre end deres Sum, og omvendt.

Naar Eccentriciteten Cc' er $> CB - c'b'$ og $< CB + c'b'$, Fig. 75. da skulle Cirklerne PLM og $Pl'm'$ skjære hinanden.

Thi hvis de ikke skjære hinanden, da maae den ene enten berøre den anden ind- eller udvendigen, eller den maae ligge aldeles inden- eller udenfor den anden; men naar den ene berører den anden, da er Cc' enten $= CB - c'b'$ eller $= CB + c'b'$, og naar den ene ligger aldeles inden- eller udenfor den anden, da er Cc' enten $< CB - c'b'$ eller $> CB + c'b'$ (№ 86), men disse 4 Slutninger stride alle imod Hypothesen; altsaa naar Eccentriciteten er større end Differensen og mindre end Summen af Radierne, da skjære Cirklerne hinanden.

Og omvendt, naar Cirklerne PLM og $Pl'm'$ skjære hinanden, da er Eccentriciteten Cc' større end Differensen og mindre end Summen af Radierne.

Drag til Skjærepunktet P Radierne CP og $c'P$. Trianglen CPc' giver (№ 23) Siden $Cc' < CP + c'P$ og $Cc' + c'P > CP$, altsaa $Cc' > CP - c'P$.

Anm. Naar man har to Cirklers Radier og Eccentricitet givet, og man vil vide om Cirklerne skjære eller berøre hinanden, ꝛc., da er det ikke nødvendigt at beskrive dem; man behøver kun at addere og subtrahere Radierne, og sammenligne Summen og Differensen med Eccentriciteten, for at afgjøre til hvilket af de fem mulige Tilfælde Cirklernes indbyrdes Stilling svarer.

Fig. 78. 88— Opg. **At beskrive en Cirkellinie, der skal gaae gjennem et givet Punkt B, og berøre en given Cirkellinie C′ i Punktet A.**

Naar den forlangte Cirkellinie skal gaae gjennem de to givne Punkter A og B, saa maae Linien AB være en Chorde i samme, og naar den skal berøre den givne Cirkellinie C′ i Punktet A, saa maae disse have en fælleds Tangent til Punktet A (No. 83, Følg.)

Man forener altsaa Punkterne A og B, drager gjennem Punktet A en Tangent DE til Cirkellinien C′ (No. 78), og udfører samme Construction som i No. 79.

Cirkellinien i Forbindelse med Vinkler.

89— I. En Centrivinkel er en Vinkel, hvis Toppunkt ligger i Centrum, og hvis Been ere Radier.

II. En Peripherievinkel er en Vinkel, hvis Toppunkt ligger i Peripherien, og hvis Been ere Chorder.

Fig. 77. 90— **Ligestore Centrivinkler ACB, A′C′B′, i een Cirkel, eller i Cirkler beskrevne med samme Radius, staae paa ligestore Buer AB, A′B′.**

Og omvendt, naar Buerne AB og A′B′ ere ligestore, da ere ogsaa Centrivinklerne ACB og A′C′B ligestore.

Thi 1° Naar $\angle$ ACB er $=$ A′C′B′, da kunne disse to Vinkler bringes saaledes paa hinanden, at den Enes Been falde paa den Andens Been, og, da Benene ere ligestore, falder Punktet A′ paa A, og B′ paa B; men naar Buerne AB og A′B′

have fælleds Endepunkter, saa dække de hinanden, forbi de ere beskrevne med samme Radius (№ 67); altsaa er ⌒ AB = A′B′.

2° Naar ⌒ AB er = A′B′, da er ogsaa ∠ ACB = A′C′B′; thi antag at de ere uligestore, at ACB er den største, da kunne i denne tages en Vinkel ACD = A′C′B′, hvoraf fulgte (1°) ⌒ AD = A′B′, men ifølge Forudsætningen er ⌒ A′B′ = AB, altsaa ⌒ AD = AB, hvilket er umuligt, da en Deel ei kan være liig det Hele; altsaa er ∠ ACB = A′C′B′.

91— Naar to Centrivinkler ACB og A′C′B′, i een Cirkel, eller i Cirkler beskrevne med samme Radius, forholde sig som to hele Tal, da forholde sig ogsaa de tilsvarende Buer AB og A′B′ som disse to Tal, og man har altsaa denne Proportion ∠ ACB : ∠ A′C′B′ = ⌒ AB : ⌒ A′B′. Fig. 78.

Lad os antage at Vinklerne ACB og A′C′B′ forholde sig som 7 til 4, eller, hvilket er det Samme, at deres Fællesdmaal ∠ M indeholdes nøie 7 Gange i ∠ ACB, og 4 Gange i ∠ A′C′B′. Da Vinklerne AC*m*, *m*C*n*, ꝛc. A′C′*m*′, *m*′C′*n*′, ꝛc. ere ligestore, saa maae ogsaa Buerne A*m*, *mn*, ꝛc. A′*m*′, *m*′*n*′, ꝛc. være ligestore, og altsaa hele Buen AB forholde sig til hele Buen A′B′ som 7 til 4. Det er indlysende at samme Raisonnement er gjældende, naar man istedetfor 7 og 4 har hvilkesomhelst andre Tal; altsaa, naar Vinklerne ACB og A′C′B′ forholde sig som to hele Tal, saa forholde sig Buerne AB, A′B′ som Vinklerne ACB, A′C′B′.

Anm. Og omvendt, naar Buerne AB, A′B′ forholde sig som to hele Tal, da forholde sig ogsaa Vinklerne som disse to Tal, og man har stedse ∠ ACB : ∠ A′C′B′ = ⌒ AB : ⌒ A′B′, thi Buerne A*m*, *mn*, ꝛc. A′*m*′, *m*′*n*′, ꝛc. ere ligestore, altsaa ere og Vinklerne AC*m*, *m*C*n*, ꝛc. A′C′*m*′, *m*′C′*n*, ꝛc. ligestore.

Følg. Linierne C*m*, C*n*, ꝛc., der dele Buen AB i et vist Antal ligestore Dele, dele ogsaa Vinklen ACB, hvis Maal er

denne Bue, i samme Antal ligestore Dele; altsaa bringes en Vinkels Deling tilbage paa, at dele den tilsvarende Bue.

Dersom vi vare istand til, ved Construction, at dele en Bue i et hvilketsomhelst Antal ligestore Dele, saa havde vi Opløsningen af samme Spørgsmaal med Hensyn til Vinkler; men den elementære Geometrie frembyder kun Middel til en Bues Halvering; altsaa have vi kun en Construction for en Vinkels Deling i 2, 4, 8, ... 2^n ligestore Dele (No 70, III).

Fig. 79. 92. To Vinkler ACB og A'C'D' forholde sig stedse, hvordan dette Forhold endog er, som Buerne AB og A'D', beskrevne fra Toppunkterne som Centrer, og med samme Radius.

Lad os antage den mindste Vinkel anbragt i den største. Hvis denne Sætning ikke fandt Sted, da havde man $\angle ACB : \angle ACD = \frown AB$: en Bue $>$ eller $< \frown AD$. Antag denne Bue $> AD$, og lad den være AO, saa haves:

$$\angle ACB : \angle ACD = \frown AB : \frown AO \quad (1)$$

Forestille vi os nu Buen AB deelt i ligestore Dele $< DO$, saa findes der i det mindste eet Delingspunkt, I, mellem D og O, og Buerne AB, AI forholde sig som to hele Tal, altsaa

$$\angle ACB : \angle ACI = \frown AB : \frown AI \quad (2)$$

og, da Proportionerne (1), (2) have samme foregaaende Led, saa ere de efterfølgende proportionale, altsaa

$$\angle ACD : \angle ACI = \frown AO : \frown AI.$$

Var nu denne Proportion rigtig, saa fulgte, fordi $\frown AO$ er $> AI$, at $\angle ACD$ var $> ACI$, men det er netop modsat, altsaa er det umuligt, at det fjerde Led i Proportionen (1) kan være $> AD$; og, da man, ved et fuldkommen lignende Raisonnement, beviser, at det heller ikke kan være $< AD$, saa maae det være $= AD$, og Proportionen

$$\angle ACB : A'C'D' = \frown AB : \frown A'D'$$

være rigtig i ethvert Tilfælde.

Følg. Da der findes en saadan Forbindelses Sted mellem en Centrivinkel og dens Bue, at, naar den ene voxer eller aftager i et hvilketsomhelst Forhold, den anden da ogsaa voxer eller aftager i samme Forhold, saa er man berettiget til, at antage een af disse Størrelser som Maal for den anden. Vi tage herefter Buen AB som Maal for Vinklen ACB. Kun bør der, ved Vinklers Sammenligning iagttages, at Buerne, der tjene som Maal for disse Vinkler, beskrives med samme Radius; thi dette forudsætte alle de foregaaende Sætninger, paa hvilke vi grunde vor Antagelse.

Naar man derfor siger **Maalet** for en hvilkensomhelst Vinkel ACB er en fra Toppunktet som Centrum beskrevne Bue AB, hvis Endepunkter ligge i Vinklens Been, da underforstaaer man, at i en til Eenhed tagen Vinkel A′C′D′ er fra Toppunktet, som Centrum, beskrevet en Bue A′D′ med samme Radius som Buen AB, og at Forholdet af Buen AB til Buen A′D′ angiver Forholdet af Vinklen ACB til Vinklen A′C′D′.

Anm. At maale en Vinkel, eller almindeligere sagt, at finde Forholdet mellem to Vinkler, bliver derfor bragt hen paa, at finde Forholdet mellem to Buer, beskrevne fra disse to Vinklers Toppunkter med samme Radius (№ 69).

Det synes meest passende at tage den rette Vinkel til Eenhed. Buen der svarer til denne Vinkel er $\frac{1}{4}$ af Peripherien, og kaldes **Qvadrant**. Beskrives nemlig fra den rette Vinkel ACB's Toppunkt C, som Centrum, en Cirkel, og BC forlængres til D, saa er BD en Diameter, altsaa (№ 67, IV) Buen DAB den halve Peripherie, og, da de to rette Vinkler ACB og ACD ere ligestore, saa (№ 90) ere ogsaa Buerne AB og AD ligestore, altsaa er Buen AB, der svarer til den rette Vinkel ACB, $\frac{1}{4}$ af Peripherien eller en Qvadrant. Fig. 80.

Qvadranten inddeles i 90 ligestore Dele, som kaldes Grader; hver Grad igjen i 60 Minutter, hver Minut i 60 Secunder.

Siger man, at en Vinkel er f. Ex. 45 Grader 48 Minutter 36 Secunder, der betegnes saaledes $45^{\circ} 48' 36''$, saa forstaaer man derved, at Buen har dette Antal Grader etc., og man finder altsaa denne Vinkels Forhold til den rette Vinkel, ved at dividere $45^{\circ} 48' 36''$ eller $45^{\circ},81$ med 90; det er altsaa 0,509.

Naar den rette Vinkel er 1, saa vil altsaa enhver spids Vinkel blive udtrykt ved et Tal mellem 0 og 1, enhver stump Vinkel ved et Tal imellem 1 og 2.

En Vinkel tegnet paa Papiret udmaales, eller omvendt en given Vinkel afsættes paa Papiret, ved Hjelp af Transporteuren, som er en inddeelt Halvcirkel.

93— Maalet for en Peripherievinkel er Halvdelen af Buen, den staaer paa.

Der ere tre Tilfælde:

Fig.81. 1º At Centret C ligger i det ene Been af Peripherievinklen BAD. Drag Radius BC. Den udvendige Vinkel BCD ved $\triangle$ BAC er liig Summen af de to indvendige modstaaende Vinkler ABC, BAC (Nº 45, VII), men Siden BC $=$ CA, altsaa (Nº 27) $\angle$ ABC $=$ BAC, og følgelig $\angle$ BAC $= \frac{1}{2}$ BCD; men Maalet for Centrivinklen BCD er Buen BD (Nº 92), altsaa er $\frac{1}{2}$ BD Maalet for Peripherievinklen BAD.

2º At Centret ligger i Peripherievinklen BAE. Drages Diameteren AD, saa har man $\angle$ BAD, hvis Maal er $\frac{1}{2}$ BD, og $\angle$ DAE, hvis Maal er $\frac{1}{2}$ DE, altsaa har $\angle$ BAD $+$ DAE eller $\angle$ BAE til Maal $\frac{1}{2}$ BD $+ \frac{1}{2}$ DE eller $\frac{1}{2}$ BE.

3º At Centret ligger udenfor Peripherievinklen FAB. Drages Diameteren AD, saa har man $\angle$ FAD, hvis Maal er $\frac{1}{2}$ FD, og $\angle$ BAD, hvis Maal er $\frac{1}{2}$ BD, altsaa har $\angle$ FAD $-$ BAD eller $\angle$ FAB til Maal $\frac{1}{2}$ FD $- \frac{1}{2}$ BD eller $\frac{1}{2}$ FB.

Altsaa er Maalet for enhver Peripherievinkel Halvdelen af Buen den staaer paa.

Og omvendt, naar en Vinkel, der staaer paa en Bue FB, har til Maal Halvdelen af denne Bue, da er den en Peripherievinkel.

Thi hvis $\frac{1}{2}$ FB kunne være Maalet for Vinklen FIB, og man dannede Peripherievinklen FAB, der har samme Maal, saa skulle $\angle$ FIB være $=$ FAB hvilket er umuligt (№ 45, VII).

Følg. I. Peripherievinklerne C, D, E, der staae paa samme Bue AB, ere ligestore; thi de have samme Maal, Halvdelen af Buen AB. Fig.82.

En Peripherievinkel ACB siges at være indskreven i et Segment ABECA, naar dens Been staae paa Chordens Endepunkter. Altsaa ere alle i samme Segment indskrevne Vinkler ligestore.

Bevæger sig en Vinkel ACB, dog uden at forandre sig, saaledes at det ene Been gaaer igjennem Punktet A, det andet Been igjennem Punktet B, da beskriver Toppunktet en Cirkelbue ADEB, og man siger, at have beskrevet paa Linien AB et Segment svarende til en given Vinkel ACB.

II. Enhver Vinkel ADB, indskreven i en Halvcirkel, er en ret Vinkel; thi Maalet er Halvdelen af den halve Peripherie eller en Qvadrant. Fig.83.

Dette kan bevises paa en anden Maade. Drag Radius DC. I den ligebenede Triangel ACD er $\angle A = p$, og i den ligebenede Triangel DCB er $\angle B = q$, altsaa $\angle A + B = p + q = D$; men, naar Summen af to Vinkler i en Triangel er liig den tredie, saa er denne Vinkel D ret, thi Summen af de tre Vinkler er liig to rette (№ 45).

III. Enhver Vinkel ADB, indskreven i et Segment ABDA, der er større end en Halvcirkel, er en spids Vinkel; thi Maalet er Halvdelen af Buen AFB, der er mindre end den halve Peripherie. Fig.82.

Og enhver Vinkel AFB, indskreven i et Segment ABF, der er mindre end en Halvcirkel, er en stump Vinkel; thi Maalet er Halvdelen af Buen ADB, der er større end den halve Peripherie.

Fig. 81. **94— Maalet for en Vinkel TAF, dannet af en Tangent og en Chorde, er Halvdelen af den til Chorden svarende Bue FMA.**

Drages, til Berøringspunktet A, Diameteren DA, saa har man den rette Vinkel TAD, hvis Maal er Halvdelen af den halve Peripherie AFD, men Maalet for ∠ FAD er $\frac{1}{2}$ FD, altsaa har ∠ TAD — FAD eller ∠ TAF til Maal $\frac{1}{2}$ AFD — $\frac{1}{2}$ FD eller $\frac{1}{2}$ FMA.

Man beviser ligedan, at Maalet for Vinklen T′AF er Halvdelen af Buen AEBF.

Fig. 81. **95— Maalet for en Vinkel GAE, dannet af en Chorde AE og Forlængringen af en anden Chorde FA, er Halvdelen af Buen FAE, der ligger udenfor Chordernes Vinkel FAE.**

Thi som Supplement til ∠ FAE har ∠ GAE til Maal den halve Peripherie minus den halve Bue FDE, eller den halve Differens mellem Peripherien og Buen FDE, men denne Differens er Buen FAE, altsaa er Maalet $\frac{1}{2}$ FAE.

Fig. 84. **96— Maalet for en Vinkel AIB, hvis Toppunkt ligger mellem Peripherien og Centret, er den halve Sum af Buerne AB og FE, der ligge, den ene mellem Benene, den anden imellem disses Forlængringer.**

Thi ∠ AIB er $= m + n$ (№ 45, VII), men Maalet for ∠ m er $\frac{1}{2}$ AMB, og Maalet for ∠ n er $\frac{1}{2}$ FE, altsaa er $\frac{1}{2}$ AMB + $\frac{1}{2}$ FE Maalet for Vinklen AIB.

Fig. 84. **97— Maalet for en Vinkel ADB, hvis Toppunkt ligger udenfor Cirklen, er den halve Differens mellem de to Buer AB og FE, der ligge mellem Benene.**

Thi $\angle$ ADB $= p - a$ (№ 45, VII), men Maalet for $\angle p$ er $\frac{1}{2}$ AMB, og Maalet for $\angle a$ er $\frac{1}{2}$ FE, altsaa er $\frac{1}{2}$ AMB — $\frac{1}{2}$ FE Maalet for $\angle$ ADB.

Anm. Denne Vinkel er dannet af to sammenstødende Secanter; men man beviser ligedan, at Maalet for Vinklen TDA, dannet af en Tangent og en Secant er $\frac{1}{2}$ TA — $\frac{1}{2}$ TF, og, at Maalet for Vinklen TDT′, dannet af to sammenstødende Tangenter, er $\frac{1}{2}$ TMT′ — $\frac{1}{2}$ TET′ = $\frac{1}{2}$ Peripherie — $\frown$ TET′.

98— Opg. At opreise en Perpendiculær paa Enden af en Linie AB, uden at forlængre denne. Fig. 85.

Man beskriver fra et Punkt C udenfor Linien, med Radius CA, en Cirkel, der skjærer den givne Linie i et andet Punkt B; man drager fra Punktet B Diameteren BD og fra D Chorden DA. Denne Linie DA er perpendiculær paa AB; thi DAB er en ret Vinkel, fordi den er indskreven i en Halvcirkel, (№ 93, II).

99— Opg. Fra et givet Punkt at drage en Tangent til en given Cirkel.

1° Ligger det givne Punkt A i Peripherien, da opreises paa Radius CA en Perpendiculær AB. Denne Linie AB er Tangent til Cirklen (№ 78). Fig. 72.

2° Ligger det givne Punkt A udenfor Cirklen, saa forener man det med Centret C; man halverer Linien AC; fra Delingspunktet O som Centrum, med Radius OC, beskriver man en Cirkellinie BAB′, der skjærer den givne i et Punkt B; man drager AB, der er den forlangte Tangent. Fig. 86.

Thi drages Radius CB, saa har man $\angle$ CBA, der er en ret Vinkel, fordi den er indskreven i en Halvcirkel (№ 93, II), altsaa er AB $\perp$ CB; altsaa er Linien AB en Tangent (№ 78).

Anm. Fra et Punkt A udenfor Cirklen kan man stedse drage to ligestore Tangenter AB, AB′; og Linien AC, der gaaer igjennem Tangenternes Sammenstødningspunkt og Centret, deler Tangenternes Vinkel BAB′ i to ligestore Dele.

Thi de to retvinklede Triangler ACB og ACB′ have fælleds Hypotenus AC, og Catheten CB $=$ CB′, altsaa (No. 43) er $\triangle$ ACB $\cong$ ACB′, og følgelig Siden AB $=$ AB′, $\angle$ BAC $=$ B′AC.

Fig. 87. 100 — Opg. At indskrive en Cirkel i en given Triangel ABC.

Halveer Vinklerne A og B ved Linierne AO og BO, der støde sammen i et Punkt O, og fæld fra dette Punkt ned paa Trianglens tre Sider Perpendiculærerne OD, OE og OF. Disse tre Perpendiculærer ere ligestore; thi, ifølge Constructionen ere Trianglerne AOD og AOF retvinklede, have fælleds Hypotenus AO, og $\angle m = n$, altsaa (No. 35, Følg.) er $\triangle$ AOD $\cong$ AOF, og følgelig Siden OD $=$ OF. Man beviser ligedan at $\triangle$ BOD $\cong$ BOE, følgelig Siden OD $=$ OE; altsaa ere de tre Perpendiculærer OD, OE og OF ligestore.

Naar man nu fra Punktet O som Centrum, med Radius OD, beskriver en Cirkel DEF, da er denne indskreven i $\triangle$ ABC; thi Siden AB, der er perpendiculær paa Enden af Radius OD, er en Tangent, og det Samme er Tilfældet med Siderne AC og BC.

Anm. De tre rette Linier AO, BO og CO, der halvere de tre Vinkler i $\triangle$ ABC støde sammen i eet Punkt O; og dette Punkt er Centret for den indskrevne Cirkel.

Fig. 88. 101 — Opg. Gjennem et givet Punkt A, indenfor eller udenfor Peripherien af en given Cirkel CE, at drage en Chorde af en given Længde a.

Afsæt, paa et vilkaarligt Sted i Peripherien, en Chorde BD $= a$, fæld fra Centret C Perpendiculæren CH ned paa BD, beskriv fra C, med Radius CH, en Cirkel HI, og drag gjennem Punktet A til denne Cirkel en Tangent AF, der skjærer den givne Cirkel i Punkterne E og F saa er Chorden EF $= a$.

Thi Chorden EF er $=$ BD, fordi de ligge ligelangt fra Centret (№ 76), men, ifølge Constructionen er BD $= a$, altsaa er Chorden EF $= a$.

Anm. Fra Punktet A til Cirklen HI kan man drage to Tangenter (№ 99, Anm.), altsaa finder man to Chorder, der fyldestgjøre Opgaven.

102— Opg. *Gjennem et givet Punkt A, at drage en ret Linie saaledes, at det Stykke af samme, der ligger imellem to givne concentriske Cirkellinier FD og NM, har en given Længde b.* Fig. 88.

Beskriv fra et hvilketsomhelst Punkt M i den ene Cirkellinie, med en Radius liig b, en Bue, der skjærer den anden Cirkellinie i et Punkt D, drag MD og forlængre den til B, fæld fra Centret C paa BD Perpendiculæren CH; beskriv fra samme Centrum, med Radius CH, en Cirkel, og drag til denne, fra det givne Punkt A, en Tangent AN. Denne Tangent er den forlangte Linie, og Stykket FN $= b$.

Thi Chorden EF er $=$ BD (№ 76), og, da disse to Chorder halveres af de perpendiculære Radier CI og CH, saa er IF $=$ HD; af samme Grunde er IN $=$ HM, altsaa er IN $-$ IF $=$ HM $-$ HD, eller FN $=$ DM, men, ifølge Constructionen er DM $= b$, altsaa FN $= b$.

Anm. Fra et givet Punkt A til Cirklen HI kan man drage to Tangenter (№ 99, Anm.), altsaa finder man to Linier, der fyldestgjøre Opgaven.

103— Opg. *Paa en given Linie AB, at beskrive et Segment svarende til en given Vinkel m.* Fig. 89 og 90.

Forlængre AB mod D, afsæt i Punktet B en Vinkel DBE $= m$, drag BO $\perp$ BE, og GO $\perp$ Midten af AB, og beskriv fra disse to Perpendiculærers Skjærepunkt O som Centrum, med Radius OB, en Cirkel. Segmentet ABMA er det forlangte.

Thi Perpendiculæren FE paa Enden af Radius OB er en Tangent, og $\angle$ ABF har til Maal $\frac{1}{2}$ AKB (№ 94), men

½ AKB er ogsaa Maalet for Peripherievinklen M, altsaa er ∠ M = ABF, men ∠ ABF er = DBE = *m*, altsaa ∠ M = *m*; altsaa er enhver i Segmentet ABMA indskreven Vinkel liig den givne Vinkel *m*.

Anm. Naar den givne Vinkel er ret, da er det forlangte Segment en Halvcirkel, beskrevet paa Diameteren AB.

Denne Construction bliver ofte anvendt, især deelesheb naar man vil danne en Triangel, i hvilken man, iblandt andre Ting, kjender en Side og dens modstaaende Vinkel, saaledes i følgende Opgaver.

Fig.91. 104— Opg. At construere en Triangel, naar Basis *b* og dennes modstaaende Vinkel A, samt Høiden *h* ere givne.

Drag en ret Linie BE = *b*, og parallel med denne, i en Afstand HG = *h*, Linien DD′, og beskriv paa BE et Segment svarende til Vinklen A, saa vil den beskrevne Cirkellinie skjære Linien DD′ i to Punkter D og D′, som ere Toppunkterne til de to Triangler BDE og BD′E, der begge fyldestgjøre Opgaven.

Fig.92. 105— Opg. Paa en given Linie AB, som Basis, at construere en Triangel, hvis Toppunkt ligger i en given Cirkellinie DMD′, naar den overfor Basis liggende Vinkel *d* er givet.

Man beskriver paa AB et Segment svarende til den givne Vinkel *d* (№ 103). Den beskrevne og den givne Cirkellinies Overskjæring bestemmer Trianglens Toppunkt, men da der opstaae to Skjærepunkter D og D′, saa ere Trianglerne ABD og ABD′ to Opløsninger af Problemet.

Fig.80. 106— Opg. I samme Plan som tre givne Punkter A, B og C, at bestemme et fjerde Punkt C″, naar Vinklerne AC″B og BC″C ere givne.

Man beskriver paa AB et Segment svarende til Vinklen AC″B, og paa BC et Segment svarende til Vinklen BC″C.

De to beskrevne Cirkelliniers Overskjæring bestemmer det søgte Punkt; altsaa har man, i Almindelighed, to Opløsninger; men gaae begge Cirkellinierne gjennem de tre givne Punkter, da er Opgaven ubestemt; og gaaer den ene, men ikke den anden, gjennem de tre givne Punkter, da er Opløsningen umulig.

107— Opg. At construere en Triangel, naar man har givet Basis AB og dens modstaaende Vinkel C, samt Radius *r* til den indskrevne Cirkel. Fig. 87.

Antag Problemet opløst ved △ ABC. Linierne AO og BO, dragne til Centret O af den indskrevne Cirkel, halvere Vinklerne A og B (Nº 100), altsaa, i △ AOB, er ∠ AOB $= 2R - \frac{1}{2}(A + B)$, men ∠ $A + B = 2R - C$, altsaa ∠ AOB $= R + \frac{1}{2}C$. I △ AOB kjender man altsaa ∠ AOB $= R + \frac{1}{2}C$, denne Vinkels modstaaende Side AB, og Høiden OD $= r$; man kan derfor construere denne Triangel (Nº 104), og dens Toppunkt O giver Centret til den, i den forlangte Triangel, indskrevne Cirkel.

Naar man da, fra Punktet O, med den givne Radius *r*, beskriver denne Cirkel DEF, der tangerer Siden AB i Punktet D, og, fra Punkterne A og B, drager Tangenterne AC og BC, saa er ABC den forlangte Triangel.

III. Proportionale Linier.

108. For at kunne forstaae det Følgende er det nødvendigt at kjende Læren om Proportioner, men da denne afhandles i Algebraen, saa forudskikkes kun nogle Bemærkninger, der tjene til at fastsætte Sætningernes sande Betydning, og til at ophæve enhver Utydelighed i Udtryk eller i Beviserne.

Naar man har en Proportion

$$A : B = C : D$$

da er, som bekjendt, Productet af Yderleddene $A \times D$ liig Productet af Mellemleddene $B \times C$.

Denne Sandhed, uomstødelig ved Tal, er det ogsaa ved hvilkesomhelst Størrelser, forudsat at de lade sig udtrykke, eller at man tænker sig dem udtrykt i Tal, hvilket man stedse kan antage. Naar A, B, C, D f. Ex. ere Linier, da kan man tænke sig at een af disse fire Linier, eller og en femte Linie tjener til at udmaale dem alle, og er taget til Eenhed; isaafald forestiller A, B, C, D, hver især, et vist Tal, heelt eller bruddet, commensurabelt eller incommensurabelt.

Productet af Linierne A og D er da ikke Andet end det Antal Linie-Eenheder, der indeholdes i A, multipliceert med det Antal Linie-Eenheder, der indeholdes i D; og man begriber let, at dette Product kan og bør være liig Productet af de to Tal, der, paa samme Maade, fremkomme ved Linierne B og C.

Størrelserne A og B kunne være af een Art, f. Ex. Linier, og Størrelserne C og D af en anden Art, f. Ex. Flader; men disse Størrelser bør dog stedse betragtes som Tal: A og B udtrykte i Linie-Eenheder, C og D i Flade-Eenheder, og Productet $A \times D$ er da et Tal, saavelsom Productet $B \times C$.

I Almindelighed bør, ved alle de Operationer som foretages med Proportioner, Leddene i disse Proportioner betragtes som lige saamange Tal, hvert af den Art som Størrelsen henhører under;

og man vil da uden Vanskelighed forstaae disse Operationer, og de Slutninger, som følge deraf.

Naar fire Linier A, B, C, X danne denne Proportion:

$$A : B = C : X$$

da kaldes X den fjerde Proportionallinie til de tre Linier A, B og C.

Naar $A : B = B : X$

da kaldes X den tredie Proportionallinie til Linierne A og B.

Naar $A : X = X : B$

da kaldes X Mellemproportionallinien til A og B.

Den sidste Proportion giver $X^2 = A \times B$ d. e. anden Potens eller Qvadratet af det Antal Linie-Enheder, der indeholdes i X, er liig Antallet af de Linie-Enheder, der indeholdes i A, multipliceert med det Antal Linie-Enheder, der indeholdes i B.

Ved Roduddragning har man $X = \sqrt{A \times B}$; den fundne Rod er det Antal Linie-Enheder, der indeholdes i X.

Qvadratet af Linien AB betegnes saaledes $\overline{AB}^2$.

109— Naar to rette Linier AH og *ah* skjæres af et hvilketsomhelst Antal Paralleler A*a*, B*b*, ꝛc., dragne fra Punkter i den første Linie, der ligge ligelangt fra hinanden, da ere ogsaa Delene *ab*, *bc*, ꝛc., af den anden Linie, ligestore. Fig. 83.

Drages fra Punkterne *a*, *b*, *c*, ꝛc. Linierne *am*, *bn*, *cp*, ꝛc., $\neq$ AH, saa dannes Trianglerne *amb*, *bnc*, *cpd*, ꝛc., i hvilke Siderne *am*, *bn*, *cp*, ꝛc. ere, hver især, liig AB, BC, CD, ꝛc. (№ 61), men disse ere ligestore, altsaa $am = bn = cp$ ꝛc.; endvidere er $\angle\, mab = nbc = pcd$ ꝛc. som eensbeliggende ved Secanten *ah* (№ 54, II), og $\angle\, amb = bnc = cpd$, fordi Benene ere parallele (№ 60); altsaa have disse Triangler tre ligestore Stykker: een Side og to hosliggende Vinkler, følgelig er Siden $ab = bc = cd$ ꝛc., (№ 22, Følg.)

Følg. Da AB altsaa indeholdes lige saamange Gange i AH, som *ab* i *ah*, saa har man Proportionen

$$AB : AH = ab : ah$$

og, naar de foregaaende Led multipliceres med et Tal *n*

$$n \times AB : AH = n \times ab : ah$$

følgelig $AE : AH = ae : ah$

altsaa $AE : AH - AE = ae : ah - ae$

eller $AE : EH = ae : eh$

Fig. 94. 110— To rette Linier AH og *ah*, der staae mellem to Paralleler A*a* og H*h*, skjæres af en tredie i proportionale Dele, d. e. at

$$AE : EH = ae : eh.$$

Der kunne indtræffe to Tilfælde:

1° Naar AE og EH ere commensurable, og man fører deres Fællesdsmaal paa AH, fra A mod H, saa deler det AE og EH nøie i et vist Antal ligestore Dele, og altsaa ere E og H to af disse Delingspunkter. Drages fra alle disse Punkter Linier $\neq$ A*a*, saa dele de *ah* i ligestore og samme Antal Dele som AH, altsaa (Nº 109)

$$AE : EH = ae : eh.$$

2° Naar AE og EH ere incommensurable, da finder ogsaa samme Proportion Sted; thi, hvis ikke, da havde man til de tre første Linier en fjerde, der enten var < eller > *eh*; antag den mindre, at f. Ex.

$$AE : EH = ae : ek.$$

Inddelte man AH i ligestore, men mindre Dele end *hk*, og fra alle Delingspunkterne drog Linier $\neq$ A*a*, da vilde i det mindste een Parallel I*i* træffe *ah* i et Punkt *i* mellem *k* og *h*, og man havde da, fordi AE og EI ere commensurable,

$$AE : EI = ae : ei.$$

Denne og den forrige Proportion have samme foregaaende Led, altsaa ere de efterfølgende proportionale, d. e.

$$EH : EI = ek : ei$$

hvilket er umuligt, forbi $EH > EI$ og $eh < ei$; altsaa er det umuligt, at AE forholder sig EH som ae til en Linie $< eh$.

Man beviser, ved et fuldkommen lignende Raisonnement, at det fjerde Led i denne Proportion er heller ikke $> eh$; altsaa maae det være $= eh$, og man har saaledes, i ethvert Tilfælde, Proportionen:

$$AE : EH = ae : eh.$$

Følg. I. Af denne Proportion følger:

$$AE + EH : AE = ae + eh : ae$$

eller $AH : AE = ah : ae$

man har og $AH : EH = ah : eh$.

II. Et hvilketsomhelst Antal rette Linier AH, $A'H'$, $A''H''$, Fig.95.
ꝛc., der staae mellem samme to Paralleler AF, HC, skjæres af en tredie i proportionale Dele, d. e.

$$AM : MH = A'M' : M'H' = A''M'' : M''H'' \text{ ꝛc.}$$

III. Naar et hvilketsomhelst Antal rette Linier BC, DE, FG ꝛc., der staae mellem samme to Paralleler AF, HC, skjære hinanden alle i eet Punkt N, da ere Stykkerne proportionale, d. e.

$$BN : NC = DN : NE = FN : NG \text{ ꝛc.}$$

111— En ret Linie EB, draget i en Triangel Fig.94.
AHC parallel med een af Siderne, deler de to øvrige Sider i proportionale Dele, d. e.

$$AE : EH = AB : BC.$$

Drag en Linie $ah \neq AC$, forlængre EB og HC til de træffe ah i e og h, og drag fra A Linien $Aa \neq Hh$. Ifølge foregaaende Sætning har man:

$$AE : EH = ae : eh$$

men $ae = AB$, og $eh = BC$ (№ 61), altsaa:

$$AE : EH = AB : BC.$$

Følg. I. Af denne Proportion følger:

$$AH : AE = AC : AB$$

$$AH : EH = AC : BC.$$

Fig.96. II. To sammenstødende Linier AE og Ae deles af et hvilketsomhelst Antal Paralleler Bb, Cc, ɀc. i proportionale Dele; thi $\triangle$ ACc giver, fordi B$b \neq$ Cc,

$$AB : BC = Ab : bc, \quad \text{og} \quad BC : AC = bc : Ac$$

altsaa $$AB : Ab = BC : bc, \quad \text{og} \quad BC : bc = AC : Ac.$$

Forbindes disse to Proportioner ved deres fælleds Forhold BC : bc, saa har man:

$$AB : Ab = BC : bc = AC : Ac.$$

Paa samme Maade giver $\triangle$ ADd

$$AC : Ac = CD : cd = AD : Ad$$

og $\triangle$ AEe

$$AD : Ad = DE : de.$$

Alle disse Forhold ere ligestore, paa Grund af de fælleds Forhold AC : Ac, og AD : Ad, altsaa

$$AB : Ab = BC : bc = CD : cd = DE = de.$$

Anm. Naar Parallelerne dele Linien AE i ligestore Dele, da dele de ogsaa Linien Ae i ligestore Dele.

Fig.94. 112— **Naar en Linie EB deler to Sider i en Triangel AHC i proportionale Dele, da er den parallel med den tredie Side HC.**

Thi var EB ikke parallel med HC, da kunne fra E drages en anden Linie ED, som var parallel med HC, og altsaa havde man

$$AE : EH = AD : DC \quad (\text{Nº } 111)$$

men, ifølge Hypothesen,

$$AE : EH = AB : BC$$

altsaa $$AD : DC = AB : BC$$

og følgelig $$AD : AB = DC : BC$$

hvilket er umuligt, fordi AD $>$ AB, og DC $<$ BC; altsaa er det umuligt at en Parallel til HC gjennem Punktet E kan være forskjellig fra EB; altsaa er EB denne Parallel.

Anm. Samme Slutning finder Sted, naar man har Proportionen

$$AH : EH = AC : BC$$

thi deraf følger

$$AH - EH : EH = AC - BC : BC$$

eller $AE : EH = AB : BC.$

Ligedan naar man har Proportionen

$$AH : AE = AC : AB$$

thi den giver $AH - AE : AE = AC - AB : AB$

eller $EH : AE = BC : AB$

altsaa $AE : EH = AB : BC.$

Følg. I. Naar to rette Linier AH, *ah*, der staae mellem to Paralleler A*a*, H*h*, skjæres af en tredie Linie E*e* i proportionale Dele, d. e. at

$$AE : EH = ae : eh,$$

da er Linien E*e* parallel med A*a* og H*h*.

II. Naar to Linier BC, DE skjære hinanden i proportionale Dele, d. e. at Fig. 95.

$$BN : NC = DN : NE,$$

da er Linien BD, der forener Endepunkterne B og D, parallel med Linien CE, der forener Endepunkterne C og E.

112— Linien AD, der halverer Vinklen BAC i en Triangel, deler den modstaaende Side BC i to Dele, proportionale med Siderne AB, AC, der indeslutte denne Vinkel, d. e. CD : DB = AC : AB. Fig. 97.

Drag fra Punktet B en Linie BE ≠ DA, og forlængre CA indtil den træffer BE.

I △ BCE er AD ≠ Siden BE, altsaa (N° 111)

$$CD : DB = AC : AE.$$

I △ ABE er, paa Grund af Parallelerne, ∠ *p* = *m*, og ∠ *q* = *n* (N° 54, II), men, ifølge Hypothesen, ∠ *m* = *n*,

altsaa $\angle p = q$, og følgelig (№ 28) Siden AE = AB. Sæt AB istedetfor AE i ovenstaaende Proportion, saa har man

$$CD : DB = AC : AB.$$

114— Opg. At dele en given Linie i et bestemt Antal ligestore Dele, eller i Dele proportionale med givne Linier.

Fig.98. 1° Lad der være forlangt at dele Linien AF i 5 ligestore Dele.

Man drager fra eet af Endepunkterne, f. Ex. A, en ret Linie Af, og afsætter paa denne en vilkaarlig Længde Ab fem Gange; man forener det sidste Delingspunkt f med F, og drager fra b Linien bB ≠ fF. Man har da AB = $\frac{1}{5}$ AF; altsaa, naar AB afsættes 5 Gange paa AF, saa er AF deelt i 5 ligestore Dele.

Thi i △ AFf er Bb ≠ Siden Ff, altsaa (№ 111, I)

$$Ab : Af = AB : AF$$

men Ab = $\frac{1}{5}$ Af, ifølge Constructionen, altsaa AB = $\frac{1}{5}$ AF.

Fig.99. 2° Lad der være forlangt at dele Linien AD i tre Dele, proportionale med Linierne m, n, p.

Drag, fra A, en ret Linie Ad; tag Ab = m, bc = n, og cd = p, drag dD og, parallel med denne, fra c og b, Linierne cC og bB; saa er Linien AD deelt i tre Dele AB, BC, CD, proportionale med m, n, p.

Thi da Bb, Cc, Dd ere parallele, saa ere Delene AB, BC, CD proportionale med Delene Ab, bc, cd (№ 111, II), men disse ere, ifølge Constructionen, liig m, n, p, altsaa ere Delene AB, BC, CD proportionale med m, n, p.

115— Opg. At finde fjerde Proportionallinie til Fig.100. tre givne Linier A, B, C.

Afsæt paa Benene af en hvilkensomhelst Vinkel DAE, en Længde AB = A, AC = B, og AD = C; foreen BC, og drag, fra D, Linien DE ≠ BC; saa er Linien AE den søgte fjerde Proportionallinie.

Thi man har, fordi BC ≠ DE, Proportionen

$$AB : AC = AD : AE \quad (\text{Nº } 111)$$

hvis tre første Led ere liig A, B, C, altsaa

$$A : B = C : AE.$$

Følg. Man finder, ved samme Construction, tredie Proportionallinie til to givne Linier A og B; thi den er ogsaa fjerde Proportionallinie til de tre Linier A, B, B.

116— **Opg. Gjennem et givet Punkt A, i en given Vinkel BCD, at drage en Linie BD saaledes, at Delene AB og AD, der ligge mellem det givne Punkt og Vinklens Been, ere ligestore.** Fig. 101.

Drag, fra Punktet A, en Linie AE ≠ DC, tag EB = CE, og drag, gjennem B og A, Linien BAD; saa er denne den forlangte Linie.

Thi man har, fordi AE ≠ DC, Proportionen

$$BE : EC = BA : AD \quad (\text{Nº } 111)$$

men BE = EC, ifølge Constructionen, altsaa BA = AD.

117— I. **To Polygoner ere eensſidede**, naar deres Sider, taget parviis og i samme Orden, ere ligestore, d. v. s. naar, f. Ex. ved Polygonerne ABCDE og A′B′C′D′E′, Siden AB = A′B′, BC = B′C′, CD = C′D′ ꝛc. Naar Vinklerne, tagne paa samme Maade, ere ligestore, d. v. s. ∠ A = A′, ∠ B = B′, ∠ C = C′ ꝛc., da ere **Polygonerne eensvinklede**. I det ene, eller det andet Tilfælde kaldes de ligestore Sider, eller Vinkler, **eensbeliggende Sider, eller eensbeliggende Vinkler**. Fig. 102.

II. To Polygoner siges at være **ligedannede**, naar de ere eensvinklede, og deres eensbeliggende Sider ere proportionale. Eensbeliggende ere de Sider, hvis hosliggende Vinkler ere ligestore og eensbeliggende.

Congruente Polygoner ere ligedannede.

Regulære Polygoner ere ligedannede.

Ligedannet med betegnes ved ∾.

118— To eensvinklede Triangler have proportionale eensbeliggende Sider, og ere ligedannede.

Fig.108. Naar Trianglerne ABC og $A'B'C'$ have $\angle A = A'$, $\angle B = B'$, og $\angle C = C'$, da ere de eensbeliggende Sider proportionale, d. e.

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'.$$

Bringes $\triangle ABC$ saaledes paa $\triangle A'B'C'$, at $\angle A$ falder paa $\angle A'$, da har man $\triangle A'bc \cong ABC$, altsaa $\angle \beta = B$, men $\angle B = B'$, altsaa $\angle \beta = B'$, og følgelig $bc \neq B'C'$ (Nº 54, III). Men naar, i $\triangle A'B'C'$, Linien bc er $\neq$ Siden $B'C'$, da har man (Nº 111)

$$A'b : A'B' = A'c : A'C';$$

nu er $A'b = AB$, og $A'c = AC$, fordi $\triangle A'bc \cong ABC$, altsaa

$$AB : A'B' = AC : A'C' \quad (1)$$

Drages $cd \neq A'B'$, saa har man Proportionen

$$A'c : A'C' = B'd : B'C'$$

men $A'c = AC$, og, som Paralleler, der staae imellem Paralleler (Nº 61), $B'd = bc$ eller BC, altsaa

$$AC : A'C' = BC : B'C' \quad (2)$$

og, naar Proportionerne (1), (2) forbindes ved deres fælleds Forhold,

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'.$$

Altsaa ere de eensbeliggende Sider proportionale; men naar Trianglerne ABC og $A'B'C'$ ere eensvinklede og deres eensbeliggende Sider ere proportionale, saa ere de, ifølge Definitionen Nº 117, II, ligedannede.

Følg. I. For at kunne slutte til to Trianglers Ligedannelse, er det tilstrækkeligt at godtgjøre to Par Vinklers Ligestorhed; thi isaafald er ogsaa det tredie Par Vinkler ligestore, (Nº 45, II), og altsaa Trianglerne eensvinklede.

II. En Linie bc, draget parallel med een af Siderne i en Triangel $A'B'C'$, afskjærer en med denne ligedannet Triangel

A'bc; thi disse to Triangler have en fælleds Vinkel A', og $\angle \beta =$ B', fordi $bc \neq$ B'C'; altsaa △ A'bc ∾ A'B'C'.

Anm. Det bemærkes, at i to ligedannede Triangler ABC, A'B'C', ligge de eensbeliggende Sider f. Ex. BC og B'C' over-for ligestore Vinkler A og A'. Kjender man de eensbeliggende Sider, da har man strax de ligestore Forhold

AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'.

119— Naar to Triangler have proportionale eens-beliggende Sider, da ere de eensvinklede og ligedannede.

Antag, at Trianglerne ABC og A'B'C' give Fig.103.

AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C',

at altsaa AB og A'B' ere eensbeliggende Sider, ligedan AC og A'C', saavelsom BC og B'C', da ere de eensbeliggende Vinkler ligestore, nemlig ∠ A = A', ∠ B = B', og ∠ C = C'.

Tag A'b = AB, og drag $bc \neq$ B'C', saa er △ A'bc ∾ A'B'C' (№ 118, I), følgelig

A'b : A'B' = A'c : A'C' = bc : B'C'

men A'b = AB, altsaa ere alle Forholdene i denne og den fore-gaaende Række ligestore, og, da de have samme efterfølgende Led, saa ere foregaaende ligestore: A'c = AC, og bc = BC, altsaa △ A'bc ≅ ABC (№ 26), men △ A'bc ∾ A'B'C', altsaa △ ABC ∾ A'B'C', og ∠ A = A', ∠ B = B', ∠ C = C'.

Anm. Man seer af de to sidste Sætninger at, i Triang-ler, de eensbeliggende Vinklers Ligestorhed er en Følge af Sidernes Proportionalitet, og omvendt; saa at een af disse Betingelser er tilstrækkelig for at kunne slutte til Trianglernes Ligedannelse.

120— Naar to Triangler have et Par ligestore Vinkler indesluttede af proportionale Sider, da ere de li-gedannede.

Antag at Trianglerne ABC og A'B'C' have ∠ A = A', Fig.103. og at AB : A'B' = AC : A'C', da er △ ABC ∾ A'B'C'.

Tag $A'b = AB$, og drag $bc \neq B'C'$, saa er $\angle \beta = B'$ (Nº 54, II), og, da A' er en fælleds Vinkel, saa er $\triangle A'bc \sim A'B'C'$ (Nº 118, I); følgelig

$$A'b : A'B' = A'c : A'C',$$

men $AB : A'B' = AC : A'C'$, ifølge Hypothesen; nu er, ifølge Constructionen $A'b = AB$, altsaa og $A'c = AC$; endvidere $\angle A' = A$, altsaa $\triangle A'bc \cong ABC$ (Nº 21), men da $\triangle A'bc \sim A'B'C'$, saa er og $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

121— Naar de eensbeliggende Sider i to Triangler ere parallele, eller perpendiculære paa hinanden, da ere disse Triangler ligedannede.

Fig.103. Thi 1º Naar i Trianglerne ABC og $A'B'C'$, Siden $AB \neq A'B'$, og Siden $AC \neq A'C'$, da er $\angle A = A'$ (Nº 60), og, er nu ogsaa Siden $BC \neq B'C'$, saa er $\angle B = B'$, og $\angle C = C'$, altsaa $\triangle ABC \sim A'B'C'$ (Nº 118).

Det samme er Tilfældet, naar Trianglerne have en modsat
Fig.104. Stilling, som ABC og $A'B'C'$; thi forlængres BA og CA, og man drager en Linie $bc \neq BC$, saa danner man en Triangel $Abc \sim ABC$, fordi $\angle b = B$ og $\angle c = C$ (Nº 54, II). Man kommer saaledes tilbage paa det forrige Tilfælde, i hvilket Trianglerne Abc og $A'B'C'$ have samme Stilling og ere ligedannede; altsaa er og $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Det bemærkes, at de parallele Sider ligge overfor ligestore Vinkler.

Fig.105. 2º Lad Trianglerne ABC og $A'B'C'$ have Siden $AB \perp A'B'$, $AC \perp A'C'$, og $BC \perp B'C'$.

Forlængres BA og CA indtil de træffe $C'A'$, eller dens Forlængring, i D og E, saa har man, i de retvinklede Triangler AED og $A'FD$, $\angle EAD = FA'D$, som Complementer til samme Vinkel ADE, men $\angle EAD = BAC$, som Topvinkler; altsaa $\angle BAC = FA'D$ eller $B'A'C'$. Man beviser ogsaa, ved at forlængre BA og BC indtil de træffe $B'C'$ forlængret, i

D' og E', at $\angle B = B'$, og følgelig (Nº 118, I) er $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Det bemærkes, at de perpendiculære Sider ligge overfor ligestore Vinkler.

122— Opg. Paa en given Linie AC at construere en Triangel ligedannet med en given Triangel A'B'C', saa at AC og A'C' ere eensbeliggende Sider. Fig. 103.

Problemet kan opløses paa flere Maader.

1º Afsæt paa AC, i Punktet A, en Vinkel $CAB = A'$, og i C en Vinkel $ACB = C'$. Trianglen ABC fyldestgjør Opgaven, thi den er ligedannet med den givne Triangel A'B'C', fordi de eensbeliggende Vinkler ere ligestore (Nº 118), og Siderne AC, A'C' ere eensbeliggende, fordi de modstaaende Vinkler B, B' ere ligestore.

2º Søg til de tre Linier A'C', AC og A'B' fjerde Proportionallinie X, søg til de tre Linier A'C', AC og B'C' fjerde Proportionallinie Y (Nº 115), og construer paa AC en Triangel ABC, i hvilken Siden $AB = X$, og Siden $BC = Y$ (Nº 30). Denne er den forlangte Triangel, ligedannet med den givne Triangel A'B'C', thi de eensbeliggende Sider ere proportionale (Nº 119).

3º Afsæt paa AC, i A, en Vinkel $CAB = A'$, søg til de tre Linier A'C', AC og A'B' fjerde Proportionallinie X, tag $AB = X$, og drag BC. Trianglerne A'B'C' og ABC ere ligedannede, fordi de have et Par ligestore Vinkler A', A indesluttede af proportionale Sider, d. e. $A'C' : AC = A'B' : AB$ (Nº 120).

4º Tag $A'c = AC$, drag $cb \neq C'B'$, og construeer paa AC en $\triangle ABC \cong A'bc$. Man har da $\triangle ABC \sim A'B'C'$, fordi $\triangle A'bc$ er $\sim A'B'C'$ (Nº 118, II).

5º Naar AC er $\neq$ eller $\perp A'C'$, da kunne den søgte Triangel dannes ved, fra Punkterne A og C, at drage Linier $\neq$ eller $\perp$ A'B' og B'C' (Nº 121); men, naar AC og A'C'

ikke have een af disse to indbyrdes Stillinger, da kunne man først construere en Triangel, hvis Sider ere parallele med, eller perpendiculære paa den givne Triangels Sider, og i hvilken den, med A'C' eensbeliggende Side er liig AC, og dernæst, paa AC, construere en Triangel congruent med den alt fundne.

Fig.106. 123— Drages, i en Triangel ABE, en Linie *be* parallel med en Side BE, og fra det modstaaende Toppunkt til denne Side drages Linier AC, AD ꝛc., da deles saavel Linierne AB, AC, AD ꝛc. som Parallelerne *be*, BE i proportionale Dele.

Thi 1º Da Linien *be* er parallel med een af Siderne i Trianglerne ABC, ACD, ADE, saa har man (Nº 111)

$$Ab : bB = Ac : cC$$
$$Ac : cC = Ad : dD$$
$$Ad : dD = Ae : eE$$

og, naar disse tre Proportioner forbindes,

$$Ab : bB = Ac : cC = Ad : dD = Ae : eE$$

altsaa deles Linierne AB, AC, AD ꝛc. af Parallelerne *be*, BE i proportionale Dele.

2º Da $bc \neq$ Siden BC, saa er $\triangle Abc \sim ABC$ (Nº 118, II), og man har altsaa Proportionen

$$bc : BC = Ac : AC$$

nu er og, fordi $cd \neq CD$, $\triangle Acd \sim ACD$, hvoraf følger

$$Ac : AC = cd : CD$$

men denne og den forrige Proportion have et fælleds Forhold, altsaa

$$bc : BC = cd : CD.$$

Paa samme Maade finder man, at

$$cd : CD = de : DE.$$

Forbindes de to sidste Proportioner, saa har man

$$bc : BC = cd : CD = de : DE$$

altsaa deles og Parallelerne *be*, BE, i proportionale Dele.

124— Naar, i en Triangel ABC, en Side AB er deelt i et vist Antal f. Ex. 5 ligestore Dele, og fra alle Delingspunkterne b', b'' 2c., til en anden Side, drages Linier $b'c'$, $b''c''$ 2c. parallel med den tredie Side BC da ere disse Paralleler $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, 2c. af Siden BC. Fig.107.

Thi, paa Grund af disse Paralleler ere Trianglerne $Ab'c'$, $Ab''c''$, 2c. ligedannede (Nº 118, II), og give

$$Ab' : AB = b'c' : BC$$
$$Ab'' : AB = b''c'' : BC \text{ 2c., 2c.}$$

men $Ab' = \frac{1}{5}AB$, $Ab'' = \frac{2}{5}AB$, 2c. altsaa $b'c' = \frac{1}{5}BC$, $b''c'' = \frac{2}{5}BC$, 2c.

Anm. Paa denne Sætning grunder sig Construetionen af Maalestokkene.

Lad paa en ret Linie AK Maalet AB være afsat og inddeelt i f. Ex. 5 ligestore Dele AM, MN, 2c. Opreis, i Delingspunkterne, Perpendiculærerne AC, MD, NE, 2c., afsæt paa AC en vilkaarlig Længde Aa f. Ex. 5 Gange, drag fra Delingspunkterne a, c, e... Paralleler med AK, og drag Transversalerne AD, ME, NF, 2c., saa er ab, cd, ef... liig $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$,... af CD, eller liig $\frac{1}{25}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{3}{25}$ af AB. Fig.108.

Denne Maalestok giver altsaa 25de Dele af AB, f. Ex. $eo = ef + fo = (\frac{3}{25} + \frac{2}{5})AB = \frac{13}{25}AB$, og $Lo = \frac{37}{25}AB$, naar LI = KB = AB. Man anvender ofte den tidelige Maalestok, d. v. s. i hvilken de lavere Eenheder CD, ab ere $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ af Maalet AB.

125— Nedfældes fra den rette Vinkels Toppunkt A, i en retvinklet Triangel ABC, en Perpendiculær AD paa Hypotenusen, da 1º deles Trianglen i to andre, indbyrdes og med denne, ligedannede Triangler ADB og ADC. Fig.109.

2º Hver Cathete AB, eller AC, er Mellemproportionallinien til hele Hypotenusen BC og det hosliggende Stykke BD, eller CD.

3° **Perpendiculæren AD er Mellemproportionallinien til Hypotenusens to Stykker BD og DC.**

Thi 1° De tre Triangler ABC, ADB og ADC ere retvinklede, den første ifølge Hypothesen, de to øvrige fordi AD ⊥ BC; desuden have Trianglerne ABC og ADB en fælleds Vinkel B, altsaa er og det tredie Par Vinkler C og γ ligestore, og △ ABC ∾ ADB; ligedan have Trianglerne ABC og ADC en fælleds Vinkel C, altsaa er og deres tredie Par Vinkler B og β ligestore, og △ABC ∾ ADC; altsaa ere disse tre Triangler ligedannede.

Det bemærkes, at i Trianglerne ADB og ADC ere de eensbeliggende Sider perpendiculære paa hinanden, nemlig AB ⊥ AC, AD ⊥ DC, og BD ⊥ AD.

2° Da Trianglerne ADB og ABC ere ligedannede, saa ere deres eensbeliggende Sider proportionale. BD i den første Triangel og AB i den anden ere eensbeliggende, som modstaaende til ligestore Vinkler γ og C, og, af samme Grund er Hypotenusen AB i den første Triangel eensbeliggende med Hypotenusen BC i den anden, altsaa har man Proportionen

$$BD : AB = AB : BC. \quad (1)$$

Man finder paa samme Maade, ved de ligedannede Triangler ADC og ABC, at

$$DC : AC = AC : BC. \quad (2)$$

Altsaa: hver Cathete AB, eller AC, er Mellemproportionallinien til hele Hypotenusen BC og det hosliggende Stykke BD, eller DC.

3° Da Trianglerne ADB og ADC ere ligedannede, saa har man mellem de eensbeliggende Sider denne Proportion

$$BD : AD = AD : DC$$

altsaa: Perpendiculæren AD er Mellemproportionallinien til Hypotenusens to Stykker BD og DC.

Følg. I. Proportionerne (1), (2) give

$$\overline{AB}^2 = BD \times BC, \text{ og } \overline{AC}^2 = DC \times BC$$

hvoraf følger 1° $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : DC$

d. e. Catheternes Qvadrater forholde sig som de hosliggende Stykker af Hypotenusen.

2° Ved at dividere Ligningen $\overline{AB}^2 = BD \times BC$ med $\overline{BC}^2$ findes $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{BD}{BC}$, altsaa

$$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 = BC : BD$$

og, ved at dividere Ligningen $\overline{AC}^2 = DC \times BC$ med $\overline{BC}^2$, findes at

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 = BC : DC$$

altsaa: Hypotenusens Qvadrat forholdet sig til en Cathetes Qvadrat som hele Hypotenusen til Stykket der ligger ved denne Cathete.

3° Adderes Ligningerne

$$\overline{AB}^2 = BD \times BC$$

$$\text{og } \overline{AC}^2 = DC \times BC$$

da har man $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (BD + DC) BC = \overline{BC}^2$

altsaa: Hypotenusens Qvadrat er liig Summen af Catheternes Qvadrater.

Man finder $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$, og $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$ d. e. at en Cathetes Qvadrat er liig Differensen mellem Hypotenusens Qvadrat og den anden Cathetes Qvadrat.

Naar to Sider i en retvinklet Triangel ere maalte, og altsaa givne i Tal, da kan man, ved Regning, finde den tredie Side; thi de ovenstaaende Ligninger give

$$BC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2},\ AB = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2},$$

$$AC = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}.$$

Lad AB være $=3$, og AC $=4$, da er Hypotensen BC $=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$. Dersom Hypotenusen BC var $=13$, og Cathæten AC $=12$, da fandt man den anden Cathete AB $=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$.

Ere Siderne saaledes givne i Tal, da vil Trianglen let kunne construeres; thi lad l være Linie-Eenheden, saa er, i sidste Exempel, BC en Linie liig $13\,l$, AC $=12\,l$, og AB $=5\,l$.

Sætningerne om Sidernes Proportionalitet i eensvinklede Triangler, og om Hypotenusens Qvadrat i en retvinklet Triangel, ere Geometriens vigtigste og frugtbarste Sætninger; de ere næsten alene tilstrækkelige ved alle Anvendelser og ved Opløsningen af alle Problemer, paa Grund af, at alle Figurer kunne deles i Triangler, og en hvilkensomhelst Triangel i to retvinklede Triangler. Derfor indbefatte Trianglernes almindelige Egenskaber i Grunden alle Figurers; og, da den ene af de to nævnte Sætninger er en Følge af den anden, saa reduceres Geometriens Hovedsætninger, saa at sige, til den ene: at, i eensvinklede Triangler, de eensbeliggende Sider ere proportionale.

Fig. 110. II. Drages, fra et Punkt A i Peripherien, to Chorder AB og AC til Endepunkterne af Diameteren BC, da fremstaaer en Triangel ABC, retvinklet i A, altsaa 1º Perpendiculæren AD er Mellemproportionallinien til BD og DC. Man kalder Ordinat en Perpendiculær nedfældet fra et Punkt i Peripherien paa en Diameter, altsaa: **en Ordinat er Mellemproportionallinien til de to Stykker den deler Diameteren i.**

Af BD : AD $=$ AD : DC, følger $\overline{AD}^2 = BD \times DC$.

2º Chorden AB er Mellemproportionallinien til hele Diameteren BC og det hosliggende Stykke BD, følgelig $\overline{AB}^2 = BD \times BC$; ligedan $\overline{AC}^2 = DC \times BC$.

Af disse to Ligninger finder man Proportionen

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : DC$$

d. v. s. Chordernes Qvadrater forholde sig som de hosliggende Stykker af Diameteren.

Sammenlignes $\overline{BC}^2$ med $\overline{AB}^2$ og med $\overline{AC}^2$, da finder man Proportionerne

$$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 = BC : BD, \text{ og } \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 = BC : DC$$

d. v. s. Diameterens Qvadrat forholder sig til Chordens Qvadrat som hele Diameteren til Stykket der ligger ved denne Chorde.

Disse Proportioner finde ogsaa Sted ved Chorder AB, AC, dragne fra samme Endepunkt A af Diameteren AD; thi man har Fig. 111.

$$\overline{AB}^2 = AE \times AD, \text{ og } \overline{AC}^2 = AF \times AD$$

hvoraf følger $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = AE : AF$ &c.

126— Opg. At finde Mellemproportionallinien til to givne Linier *a* og *b*. Fig. 110.

Drag en ret Linie BC, tag BD = *a* og DC = *b*, beskriv paa BC, som Diameter, en Halvcirkel, og opreis, fra Punktet D, Perpendiculæren DA, der træffer Peripherien i A. Linien AD er den forlangte Mellemproportionallinie.

Thi Perpendiculæren AD, fældet fra et Punkt A i Peripherien ned paa Diameteren BC, er Mellemproportionallinien til Diameterens to Stykker BD og DC (№ 125), og disse ere liig de to givne Linier *a* og *b*.

Anm. Man finder ogsaa Mellemproportionallinien til de to givne Linier *c* og *a* ved, paa BC = *c*, at beskrive en Halvcirkel, tage BD = *a*, opreise Perpendiculæren DA, og drage Chorden AB, som er den forlangte Linie; thi den er Mellemproportionallinien til BC og BD, der ere liig *c* og *a*.

127— Naar, i en Triangel ABC, Vinklen A er spids, da er den modstaaende Sides Qvadrat mindre end Summen af de to øvrige Siders Qvadrater, og, naar man fælder Perpendiculæren CD ned paa AB, da er Differensen liig det dobbelte Product af denne Side AB og Fig. 112.

Perpendiculærens Afstand AD fra denne Vinkels Toppunkt A; saa at

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB \times AD.$$

Der ere to Tilfælde:

1º Naar Perpendiculæren CD falder inden i Triangelen, da har man BD = AB — AD, følgelig

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,AB \times AD \quad (1)$$

og, naar $\overline{CD}^2$ adderes til begge Sider,

$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,AB \times AD;$$

men de retvinklede Triangler BCD og ACD give

$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2, \text{ og } \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 \text{ (Nº 125, I)},$$

altsaa $$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB \times AD.$$

2º Naar Perpendiculæren CD falder udenfor Triangelen ABC, da har man BD = AD — AB, følgelig

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AD \times AB$$

som er identisk med den i forrige Tilfælde fundne Ligning (1); altsaa finder man paa samme Maade

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB \times AD.$$

Fig.113. 128— Naar, i en Triangel ABC, Vinklen A er stump, da er den modstaaende Sides Qvadrat større end Summen af de to øvrige Siders Qvadrater; og, naar man fælder Perpendiculæren CD ned paa AB, da er Differensen lig det dobbelte Product af denne Side AB og Perpendiculærens Afstand AD fra denne Vinkels Toppunkt A; saa at

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,AB \times AD.$$

Da Perpendiculæren maae falde udenfor Triangelen ABC (Nº 45, X), saa har man BD = AB + AD, følgelig

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 2\,AB \times AD.$$

Adderes $\overline{CD}^2$ til begge Sider af denne Ligning, og samme Reduction som i foregaaende Nº foretages, da slutter man

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,AB \times AD.$$

Anm. Naar en Triangels tre Sider ere udtrykte i Tal, da kan man bestemme om en hvilkensomhelst af denne Triangels Vinkler er ret, spids eller stump. Lad i en Triangel ABC de modstaaende Sider til Vinklerne A, B, C, være udtrykte ved Tallene a, b, c, og lad der være forlangt at bestemme, om f. Ex. Vinklen A, er ret, spids eller stump, saa sammenlignes den modstaaende Sides Qvadrat a^2 med Summen af de to øvrige Siders Qvadrater $b^2 + c^2$. Finder man $a^2 = b^2 + c^2$, da er $\angle A = R$ (No. 125, I), men har man $a^2 < b^2 + c^2$, da er $\angle A < R$ (No. 127), og har man $a^2 > b^2 + c^2$, da er $\angle A > R$. F. Ex. naar $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, da er $a^2 = 25$, $b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25$, altsaa $a^2 = b^2 + c^2$ og følgelig $\angle A = R$. Naar $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$, da er $a^2 = 64$, $b^2 + c^2 = 49 + 25 = 74$, altsaa $a^2 < b^2 + c^2$, og følgelig $\angle A < R$. Fig. 109, 112, 113.

Det bemærkes at Vinklen, der ligger overfor den største Side, tilkjendegiver om Triangelen er ret-, spids- eller stumpvinklet.

129 – **Naar, i en hvilkensomhelst Triangel ABC, fra Toppunktet til Midten af Basis drages Linien AE, da er Summen af de to øvrige Siders Qvadrater liig to Gange Summen af Delingsliniens og den halve Basis's Qvadrater, nemlig** Fig. 114.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AE}^2 + 2\,\overline{BE}^2.$$

Fæld Perpendicularen AD ned paa Basis BC, saa giver Triangelen AEC, ifølge Sætningen No. 127

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 - 2\,EC \times ED$$

og Triangelen ABE, ifølge Sætningen No. 128,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + 2\,BE \times ED.$$

Adderer man disse to Ligninger, og foretager de Reductioner der følge af BE = EC, saa finder man

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AE}^2 + 2\,\overline{BE}^2.$$

Fig.115. 130— Stykkerne af to Chorder AB, CD, der skjære hinanden, ere reciprokt proportionale d. v. s. at AO : DO = OC : OB.

Drag AC og BD. I Trianglerne ACO og BDO er ∠ m = n, som Topvinkler (№ 18), og ∠ A = D, som Peripherievinkler paa samme Bue (№ 93, I), altsaa △ ACO ∽ BDO (№ 118) og følgelig

AO : DO = OC : OB.

Følg. Denne Proportion giver AO × OB = DO × OC; altsaa danner hver Chordes to Stykker samme Product.

Fig.116. 131— Drages fra et Punkt O udenfor Cirklen to Secanter, OA, OC, der ende sig i den concave Bue AC, da ere de hele Secanter og de udenfor Cirklen liggende Stykker omvendt proportionale d. v. s. at,

OA : OC = OD : OB.

Drag AD og CB. Trianglerne OAD og OCB have en fælleds Vinkel O og ∠ A = C, (№ 93, I) altsaa △ OAD ∽ OCB (№ 118) og følgelig

OA : OC = OD : OB.

Følg. Denne Proportion giver OA × OB = OC × OD; altsaa danner hver Secant og dens udenfor Cirklen liggende Stykke samme Product.

Anm. De to sidste Sætninger kunne indbefattes under een: naar to i et Punkt O sammenstødende Linier træffe Peripherien af samme Cirkel, da ere Stykkerne OA, OB af den ene, der ligge mellem Sammenstødningspunktet O og hvert af denne Linies to Punkter i Peripherien, reciprokt proportionale med de analoge Stykker OC, OD af den anden Linie. De to Stykker af den ene Linie danne altsaa samme Product som de to Stykker af den anden. (Fig.115 og 116.)

Fig.117. 132— Drages, fra et Punkt O udenfor Cirklen, en Tangent OA og en Secant OC, da er Tangenten Mel-

Mellemproportionallen til hele Secanten og det udenfor Cirkelen liggende Stykke, d. e.

$$OC : OA = OA : OD.$$

Drag AD og AC. Trianglerne OAC og OAD have en fælleds Vinkel O og $\angle$ C = OAD, fordi den sidste, dannet af en Tangent og en Chorde, har samme Maal, $\frac{1}{2} \frown AD$, som Peripherievinklen C (№ 94), altsaa $\triangle OAC \backsim OAD$ (№ 118), og følgelig har man Proportionen

$$OC : OA = OA : OD$$

som giver $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

Anm. Denne Sætning kan betragtes henhørende under den foregaaende, naar det udenfor Cirklen liggende Stykke bliver lig den hele Secant, og altsaa dennes to Punkter i Peripherien reduceres til eet.

133— Naar man gjennem et givet Punkt P indenfor Peripherien drager en Radius AC og i dennes Forlængring tager et Punkt Q saaledes, at CP : CA = CA : CQ, saa have to, fra et hvilketsomhelst Punkt M i Peripherien til Punkterne P og Q dragne, rette Linier MP og MQ overalt samme Forhold, og man har Fig. 118.

$$MP : MQ = AP : AQ.$$

Thi, naar i den givne Proportion

$$CP : CA = CA : CQ. \quad (1)$$

Radius CM sættes istedetfor CA, saa har man

$$CP : CM = CM : CQ;$$

hvoraf sees, at i Trianglerne CPM og CQM de Sider ere proportionale, der indeslutte samme Vinkel C; altsaa $\triangle CPM \backsim CQM$ (№ 120), og følgelig

$$MP : MQ = CP : CM \text{ eller } CA.$$

Men Proportionen (1) giver

$$CP : CA = CA - CP : CQ - CA \text{ eller } = AP : AQ$$

altsaa

$$MP : MQ = AP : AQ.$$

Fig. 119. 134— Naar, i en Triangel ABC, Vinklen A deles, ved Linien AD, i to ligestore Dele, da er Productet af de to Sider AB og AC, der indeslutte denne Vinkel, liig Productet af den modstaaende Sides to Stykker BD, DC, plus Quadratet af Delingslinien AD.

Beskriv en Cirkel om Trianglen ABC (Nº 73), forlængte AD til den træffer Peripherien i E, og drag Linien CE.

$\triangle$ ABD er $\sim$ AEC; thi $\angle m = n$, ifølge Hypothesen, og $\angle$ B = E, som Peripherievinkler paa samme Bue AC (Nº 93, I), altsaa har man Proportionen

$$AB : AE = AD : AC$$

som giver $AB \times AC = AE \times AD$, men da $AE = AD + DE$, saa er

$AE \times AD$ eller $AB \times AC = \overline{AD}^2 + AD \times DE$, men $AD \times DE = BD \times DC$ (Nº 130), altsaa

$$AB \times AC = \overline{AD}^2 + BD \times DC.$$

Fig. 120. 135— I en hvilkensomhelst Triangel ABC er Productet af to Sider AB, AC liig Productet af den omskrevne Cirkels Diameter CE og Perpendiculæren AD nedfældet paa den tredie Side BC.

Drag Linien AE. I Trianglerne ABD og AEC er $\angle$ ADB = CAE = R, fordi AD $\perp$ BC, og fordi $\angle$ CAE er indskrevet i en Halvcirkel (Nº 93, II), endvidere er $\angle$ B = E (Nº 93, I), altsaa $\triangle$ ABD $\sim$ AEC (Nº 118), og følgelig har man Proportionen $AB : CE = AD : AC$, der giver

$$AB \times AC = CE \times AD.$$

Fig. 121. 136— Opg. At drage en fælleds Tangent til to givne Cirkler C, C'.

Antag Problemet opløst, at AD'D er den forlangte Tangent; drag Centrallinien AC'C og Radierne C'D', CD til Berøringspunkterne D', D. Da begge disse Radier ere perpendiculære

paa Tangenten AD′D (№ 78), saa ere de parallele (№ 50); altsaa (№ 111) giver △ ACD denne Proportion

$$AC' : AC = C'D' : CD.$$

Man har derfor ved en hvilkensomhelst, fra Punktet A dragen, Secant AI, da Radius C′I′ = C′D′, og Radius CI = CD, Proportionen

$$AC' : AC = C'I' : CI;$$

altsaa er, i △ ACI, Linien C′I′ ≠ Siden CI (№ 112).

Man drager altsaa fra Centrerne C, C′, to parallele Radier CI, C′I′ til samme Side af Centrilinien, og, gjennem Punkterne I og I′, Linien II′A, der skjærer Centrilinien i et Punkt A, fra hvilket til den ene Cirkel drages en Tangent (№ 99): denne er da og Tangent til den anden Cirkel.

Anm. Naar Cirklerne ligge udenfor hinanden, da finder man et andet Punkt A′ i Centrilinien, ved at drage to parallele Radier CK, C′K′ til modsatte Sider af denne Linie; altsaa kunne isaafald 4 Tangenter drages.

Naar Cirklerne berøre hinanden udvendigen da er A′ deres Berøringspunkt, som giver een Tangent (№ 83), og man har altsaa i dette Tilfælde kun tre Opløsninger. Skjære Cirklerne hinanden da har man kun to Opløsninger; berører den ene Cirkel den anden indvendigen da har man kun een; og ligger den ene Cirkel heelt indenfor Peripherien af den anden, da er Opløsningen umulig.

Dersom de parallele Radier CD, C′D′ vare ligestore, saa vare ogsaa CC′ og DD′ ligestore og parallele (№ 61), og det samme var Tilfældet med CC′ og *dd′*; altsaa vare der to Tangenter DD′, *dd′* parallele med Centrilinien, og som derfor ikke kunde findes paa den anførte Maade; men da Radierne CD, C′D′, C*d*, C′*d′* dragne til Berøringspunkterne ere perpendikulære paa Tangenterne, saa ere de og, i dette Tilfælde, perpendikulære paa Centrilinien, og man finder altsaa Berøringspunkterne ved at drage to Diametre perpendikulære paa Centrilinien.

Fig. 122. 137— Opg. Gjennem to givne Punkter A og B at beskrive en Cirkellinie, der berører en given ret Linie DE.

Drag fra A gjennem B Linien AD, der træffer den givne Linie DE i Punktet D; søg Mellemproportionallinien X til de to Linier AD og DB (№ 126), og tag DE = X, saa er E den forlangte Cirkellinies Berøringspunkt; thi Tangenten DE er Mellemproportionallinien til hele Secanten AD og det udenfor Cirklen liggende Stykke DB (№ 132). Man har nu tre givne Punkter A, B, E i den forlangte Cirkellinie, og altsaa kan den beskrives (№ 71).

Anm. Tager man, i Forlængringen af ED, en Længde DE′ = DE, saa finder man en anden Opløsning, nemlig en Cirkellinie, der gaaer gjennem de tre Punkter A, B og E′.

Naar Chorden AB er parallel med Tangenten DE, saa finder man Berøringspunktet ved at opreise en Perpendiculær paa Midten af AB; thi denne Perpendiculær, der gaaer gjennem Centret (№ 70, II), er ogsaa ⊥ DE, fordi DE ≠ AB (№ 54, I), altsaa maae den træffe Tangenten DE i Berøringspunktet (№ 78).

Fig. 123. 138— Opg. Gjennem et givet Punkt A at beskrive en Cirkellinie, der berører to givne rette Linier DE og EF.

Halveer Vinklen DEF ved Linien EI, nedfæld paa denne, fra det givne Punkt A, en Perpendiculær AI, og forlængre den et Stykke IB = AI, saa har man et andet Punkt B i den forlangte Cirkellinie; thi Linien EI, der halverer Vinklen DEF, dannet af to sammenstødende Tangenter DE, EF, gaaer igjennem Centret (№ 99), og halverer enhver paa samme perpendiculær Chorde AB (№ 70). Man beskriver altsaa, gjennem de to Punkter A, B, en Cirkellinie, der berører een af de givne Linier, DE eller EF (№ 137): den berører da ogsaa den anden.

Man har altsaa, i Almindelighed, to Opløsninger.

*Anm. Naar de givne Linier BD og EF ere parallele, da ligger Centret i Linien OO′, draget parallel med og i ligestor Afstand fra BD og EF. Denne Afstand OE er Cirklens Radius; man finder derfor Centret ved fra Punktet A, med en Radius lig OE, at beskrive en Bue, der skjærer Linien OO′ i Punktet O. I Almindelighed fremstaae to Skjærepunkter O, O′, der altsaa give to Opløsninger; men ligger det givne Punkt i een af de givne Linier, saa finder man kun een Cirkel, der fyldestgjør Opgaven: dens Centrum ligger der hvor Perpendiculæren, opreist i det givne Punkt, skjærer Linien OO′. Fig. 124.

139— Opg. At beskrive en Cirkellinie, der berører to givne rette Linier DE, EF og en given Cirkel A. Fig. 125.

Antag Problemet opløst, at O er den søgte Cirkels Centrum, og B, b, b' dens Berøringspunkter. Dersom man, fra samme Centrum O med Radius OA = OB + BA beskrev en Cirkel, saa berørte denne to Linier D′E′, E′F′, bragne parallel med de givne Linier DE og EF i en Afstand $ab = a'b' =$ AB: den givne Cirkels Radius. Thi, da Tangenterne DE og EF ere perpendiculære paa Radierne Ob' og Ob (№ 78), saa ere ogsaa deres Paralleler D′E′ og E′F′ perpendiculære paa Radierne O$b'a'$ og Oba (№ 54, I); altsaa ere Linierne D′E′ og E′F′ Tangenter til Cirklen A$a'a$.

Opgaven er altsaa bragt hen paa, at beskrive en Cirkellinie, der gaaer igjennem Punktet A, den givne Cirkels Centrum, og berører de to Linier D′E′, E′F′ (№ 138). Er Centret fundet, da giver Linien OA den søgte Cirkels Radius OB; thi Centrilinien OA gaaer igjennem Berøringspunktet B (№ 84, Følg.)

Der kunne være fire Opløsninger.

140— Opg. At finde et Punkt saaledes beliggende i en given Cirkellinie ABF, at Chorderne, der forbinde det med to givne Punkter A og B i samme Curve, forholde sig som m til n. Fig. 126.

Drag Chorden AB og deel den i to Dele AE, EB, der forholde sig som m til n (N° 114); deel Buen ADB i to ligestore Dele AD, DB (N° 70, III), og drag fra D, gjennem E, Chorden DF, saa er F det forlangte Punkt.

Thi, da ⌒AD = DB, altsaa ∠ x = y (N° 93, I), saa giver △ ABF denne Proportion

$$FA : FB = AE : EB \text{ (N° 113)}$$

men $AE : EB = m : n$, ifølge Constructionen,

altsaa $FA : FB = m : n$.

141— Opg. At drage en Secant gjennem to Fig.127. givne Cirkelliniers Skjærepunkt A saaledes, at de to derved fremstaaende Chorder forholde sig som m til n.

Lad MN være den søgte Linie; nedfæld paa denne fra Centrerne C og D, Perpendiculærerne CH og DK, der halvere Chorderne MA og AN, saa har man, ifølge Hypothesen,

$$HA : AK = m : n$$

og deler man CD i to Dele CI, ID, der forholde sig som m til n, og drager AI, saa er denne Linie parallel med CH og DK (N° 112, I), og altsaa perpendiculær paa MN (N° 54, I).

Man opløser altsaa Problemet, ved at dele CD ved Punktet I i to Dele, der forholde sig som m til n, og opreise i A en Perpendiculær MN paa IA.

Secanten kunne ogsaa drages som AM′N′, der skjærer Cirkelliniern i to Punkter M′ og N′, som ligge paa samme Side af Punktet A. Man bestemmer i Centrilinien et Punkt X saaledes, at

$$XD : XC = m : n;$$

man forener dernæst X med A, og opreiser i A en Perpendiculær AN′ paa AX. Linien AN′ er den forlangte.

Thi drages CF ⊥ FX, og CH′, DE ⊥ AN′, saa er CF ≠ AH′, og CH′, DE ≠ FX, altsaa

$$FE : FC = XD : XC = m : n \text{ (N° 111)}$$

men $FE = AK' = \frac{1}{2} AM'$, og $FG = AH' = \frac{1}{2} AN'$, følgelig

$$AM' : AN' = m : n.$$

142— Opg. At drage en Secant gjennem to givne Cirkelliniers Skjærepunkt A saaledes, at Summen eller Differensen af de to Chorder er liig en given Linie 2α. Fig.128.

1º Lad MN være den søgte Linie liig 2α; nedfæld paa denne, fra Centrerne C og D, Perpendiculærerne CH og DK, saa er $HK = \frac{1}{2} MN = \alpha$, altsaa og dens Parallel $DE = \alpha$. Det gaaer altsaa ud paa, at construere en retvinklet Triangel, hvis Hypotenus er CD, og hvis ene Cathete er liig α. Men man kan construere to Triangler CDE og CDE', der opfylde denne Betingelse, altsaa har man to Retninger for MN, og som danne samme Vinkel med CD.

De to Triangler, som kunne construeres paa den anden Side af CD, give samme Retninger for MN.

Deraf følger at Secanten MAN har den største Længde, naar den er parallel med Centrallinien CD: den er isaafald liig to Gange Eccentriciteten CD.

2º Lad den rette Linie MAN være draget saaledes, at de to Chorders Differens MN er $= 2\alpha$; nedfæld paa AN Perpendiculærerne CH og DK, der halvere Chorderne AN og AM, saa har man de halve Chorders Differens $HK = \alpha$; altsaa, naar $CE \neq AN$, da har man en retvinklet Triangel CDE, i hvilken Hypotenusen CD og den ene Cathete $CE = HK = \alpha$ ere bekjendte. Men paa CD kan man, til samme Side, construere to congruente retvinklede Triangler CDE og CDE'; altsaa, naar man gjennem Punktet A drager Paralleler med Siderne CE og DE', saa har man to Linier som fyldestgjøre Spørgsmaalet, og som danne samme Vinkel med CD. Fig.129.

Dersom man vilde have Punkterne M og N til at ligge som i Fig. 128, saa beskrives en Cirkel med samme Radius som Cirk-

len D, og som bærer denne i Punktet A: man har da samme Construction at udføre.

Fig.180. 143— Opg. I Trianglen ABC at indskrive en anden, det er ligedannet med en given Triangel def, og som har en Vinkelspids i et givet Punkt D i Siden AB.

Lad d være Vinklen, der skal have sit Toppunkt i D; beskriv paa Siden de et Segment svarende til Vinklen A, og paa Siden df et Segment svarende til Vinklen B (№ 103); drag gjennem Punktet d en Secant ab saaledes at Chorderne ad og db forholde sig som AD til DB (№ 141); forbind ae, bf, og forlængre disse to Linier til de støde sammen i Punktet c, saa er $\triangle abc \sim ABC$, fordi $\angle a = A$, og $\angle b = B$; altsaa ere disse Trianglers eensbeliggende Sider proportionale, og Siderne ab, AB ere ved Punkterne d, D deelte i proportionale Dele. Man finder derfor den søgte Triangel, enten ved at bestemme E og F saaledes, at Stykkerne AE, ae, ligedan BF, bf, staae i samme Forhold som de eensbeliggende Sider i Trianglerne ABC og abc, eller ved, fra D, at drage Linierne DE og DF, der danne samme Vinkler med AB, som de og df med ab.

Thi da $\angle A = a$ og $\mu = m$, saa er $\triangle ADE \sim ade$; følgelig

$$DE : de = AD : ad$$

og, da $\triangle BDF \sim bdf$, fordi $\angle B = b$, og $\angle \nu = n$, saa har man

$$DF : df = DB : db$$

$$\text{men } AD : ad = DB : db$$

altsaa $AD : ad$ eller $DE : de = DF : df$.

Nu er $\angle EDF = edf$, som Supplementer til ligestore Summer $\angle \mu + \nu = m + n$; altsaa have Trianglerne DEF og def et Par ligestore Vinkler indesluttede af proportionale Sider, altsaa $\triangle DEF \sim def$ (№ 120).

144— Opg. At dele en given Linie AB i yderste og mellemste Forhold d. v. s. i to Dele, saa at den største er Mellemproportionallinien til den mindste og hele Linien. Fig.181.

Opreis paa den givne Linie AB, i Endepunktet B, en Perpendiculær BC $=\frac{1}{2}$ AB; beskriv fra C, som Centrum, med Radius CB en Cirkel; drag AC, der skjærer Peripherien i D, og tag AF $=$ AD. Linien AB er da ved Punktet F deelt i yderste og mellemste Forhold, d. v. s. at

$$AB : AF = AF : FB.$$

Thi AB er en Tangent, fordi den er perpendiculær paa Enden af Radius CB (№ 78), altsaa, naar AC forlængres indtil den paany træffer Peripherien i E,

$$AE : AB = AB : AD \quad (№ 132)$$

følgelig $AE - AB : AB = AB - AD : AD.$

Men, da Radius BC $=\frac{1}{2}$ AB, saa er Diameteren DE $=$ AB, følgelig AE $-$ AB $=$ AD $=$ AF, og AB $-$ AD $=$ AB $-$ AF $=$ FB, altsaa

$$AF : AB = FB : AF$$

som giver AB : AF $=$ AF : FB.

Anm. Secanten AE er ogsaa, ved Punktet D, deelt i yderste og mellemste Forhold; thi, da AB $=$ DE, saa har man

$$AE : DE = DE : AD.$$

IV. Polygoner.

145— I det Foregaaende er der allerede gjort opmærksom paa, at enhver Polygon kan deles i Triangler.

Fig.182. Drages fra et hvilketsomhelst Punkt O inden i en Polygon ABCDE rette Linier OA, OB, OC, ꝛc. til alle Vinkelspidserne A, B, C, ꝛc., saa deles Polygonen i lige saamange Triangler som den har Sider: hver Side er Basis for een af disse Triangler, der alle have samme Toppunkt O.

En Polygon kan deles i Triangler paa adskillige andre Maader f. Ex. derved, at een Vinkelspids er forbundet med alle de øvrige ved rette Linier.

Fig.183. En Diagonal er en ret Linie dragen i en Polygon fra en Vinkelspids til en anden; saaledes ere Linierne AC, AD, AE Diagonaler. (See Anm. № 20, IV).

146— I en Polygon, hvis Siders Antal være betegnet ved n, kunne fra een Vinkelspids drages $n - 3$ Diagonaler, der dele Figuren i $n - 2$ Triangler.

Thi i en Polygon ABCDEF kunne fra een Vinkelspids A drages Diagonaler til alle Vinkelspidserne paa de tre nær, der ligge ved Siderne AB og AF, som indeslutte Vinklen A, men en Polygon har lige saamange Vinkler som Sider (№ 20, IV), altsaa, naar Sidernes Antal er n, kunne fra een Vinkelspids A drages $n - 3$ Diagonaler.

Disse Diagonaler dele Polygonen i $n - 2$ Triangler, thi ansees A som deres Toppunkt, da have de til Basis alle Siderne paa de to nær, der indeslutte Vinklen A, altsaa deles en Polygon, der har n Sider, af Diagonalerne dragne fra een Vinkelspids, i $n - 2$ Triangler.

Saaledes kunne i Sexkanten ABCDEF fra Vinkelspidsen A drages tre Diagonaler AC, AD, AE, der dele Figuren i fire Triangler ABC, ACD, ADE, AEF.

147— I en Polygon, hvis Siders Antal være betegnet ved n, er Summen af alle de indvendige Vinkler liig $(n-2)\,2\,R$.

Thi har Polygonen n Sider, da kan den ved Diagonaler, dragne fra een Vinkelspids, deles i $n-2$ Triangler (№ 146), men i hver Triangel er Summen af Vinklerne liig 2 R (№ 45), altsaa i de $n-2$ Triangler er Summen af alle Vinklerne liig $(n-2)\,2\,R$, men disse Vinkler udgjøre tilsammen alle Polygonvinklerne, hvilke altsaa ere liig $(n-2)\,2\,R$.

Følg. I. Altsaa er Summen af alle Vinklerne i en Fiirkant liig 4 R, i en Femkant liig 6 R, i en Sexkant liig 8 R &c.

II. I en ligevinklet Polygon, der har n Sider, er hver Vinkel liig $\frac{(n-2)\,2\,R}{n} = 2\,R - \frac{4}{n}\,R$.

Altsaa, i en ligevinklet Fiirkant ere alle Vinklerne rette.

I en ligevinklet Femkant er hver Vinkel liig $\frac{6}{5}$ R; i Sexkanten liig $\frac{4}{3}$ R, i Ottekanten liig $\frac{3}{2}$ R, i Tikanten liig $\frac{8}{5}$ R &c.

148— Naar man ved en Polygon, af et hvilketsomhelst Antal Sider, følger Contouren og forlængrer hver Side udover dens Sammenstødningspunkt med den næste Side, da er Summen af alle de udvendige Vinkler liig 4 R.

Thi f. Ex. ved Polygonen ABCD... er Summen af en udvendig Vinkel α og den jevnsides liggende indvendige Vinkel FAB liig 2 R (№ 15), og der ere lige saamange udvendige som indvendige Vinkler, eller som der ere Sider; altsaa naar Sidernes Antal er n, saa er Summen af de n Par udvendige og indvendige Vinkler liig $n \times 2\,R$, men Summen af de indvendige Vinkler er liig $(n-2)\,2\,R$ (№ 147), altsaa er Summen af alle de udvendige Vinkler liig 4 R. Fig. 134.

149— Det er beviist (№ 71) at ved enhver Triangel kan man omskrive en Cirkel; men denne Egenskab finder ei Sted ved enhver Polygon. Thi, da ikkun een Cirkellinie kan føres gjennem

hvilkesomhelst tre af en Polygons Vinkelspidser, saa ere, for at kunne omskrive en Cirkel, de øvrige Vinkelspidsers Beliggenhed betinget. Det er saaledes umuligt at kunne omskrive en Cirkel ved
Fig.135. Polygonen ABCDP, der har en Vinkelspids P udenfor Cirkellinien, ført igjennem de tre Vinkelspidser A, B, C.

150— **I enhver indskreven Fiirkant ABCD ere de modstaaende Vinkler Supplementer til hinanden.**

Thi de modstaaende Vinkler BAD og BCD have, som Peripherievinkler, til Maal Halvdelen af Buerne BCD og DAB (№ 93), der tilsammen udgjøre hele Peripherien, altsaa $\angle$ BAD + BCD = 2 R (№ 92, Anm.); og, af samme Grund, er $\angle$ ABC + ADC = 2 R; altsaa ere de modstaaende Vinkler Supplementer til hinanden.

Følg. Omvendt; naar de modstaaende Vinkler i en Fiirkant ABCD ere Supplementer til hinanden, da kan Figuren indskrives i en Cirkel; thi, dersom Cirkellinien ført igjennem de tre Vinkelspidser A, B, C, ei gik igjennem den fjerde, D, da var $\angle$ ADC ikke Supplement til $\angle$ ABC, fordi Maalet for $\angle$ ADC isaafald var enten større eller mindre end Halvdelen af Buen ABC (№ 96, 97).

Fig.135. 151— **I enhver indskreven Fiirkant ABCD er Productet af de to Diagonaler AC, BD, liig Summen af de modstaaende Siders Producter, d. e.**

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

Tag $\frown$ CO = $\frown$ AB, og drag DO, der skjærer Diagonalen AC i et Punkt I.

$\angle$ ADB er = CDI, fordi de have til Maal Halvdelen af de ligestore Buer AB og CO, og $\angle$ ABD = DCI, som Peripherievinkler paa samme Bue AMD, altsaa (№ 118) $\triangle$ ADB $\sim$ CDI; følgelig har man Proportionen

$$AB : CI = BD : CD$$

som giver $AB \times CD = CI \times BD$. (1)

Man har og $\triangle ADI \backsim BDC$; thi, da $\frown AB = \frown CO$, saa er $\frown AB + BO = \frown BO + CO$ eller $\frown AO = \frown BC$, altsaa $\angle ADI = BDC$; endvidere er $\angle DAI = DBC$, altsaa $\triangle ADI \backsim BDC$, hvoraf følger Proportionen

$$AD : BD = AI : BC$$

som giver $AD \times BC = AI \times BD$. (2)

Adderes Ligningerne (1), (2), saa har man

$$AB \times CD + AD \times BC = CI \times BD + AI \times BD$$

men den høire Side er $= (CI + AI)\, BD = AC \times BD$, altsaa $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$.

152— I. Et **Trapezium** er en Firkant, i hvilken to Sider ere parallele, men de to øvrige ikke. Fig.136.

II. Et **Parallelogram** er en Firkant, i hvilken de modstaaende Sider ere parallele. Fig.137.

Et Parallelogram benævnes ved to Bogstaver, der angive to modstaaende Vinkler.

Af Sætningen i № 61 følger:

1º Hver af Diagonalerne AC, BD, deler Parallelogrammet AC i to congruente Triangler: $\triangle ACB \cong ACD$, $\triangle BDA \cong BDC$.

2º De modstaaende Sider i et Parallelogram ere ligestore, saavelsom de modstaaende Vinkler: Siden $AB = DC$, Siden $AD = BC$, $\angle BAD = BCD$, $\angle ABC = ADC$.

3º Naar de modstaaende Sider i en Firkant ere ligestore, da er Figuren et Parallelogram: naar Siden $AB = DC$, og Siden $AD = BC$, saa er Firkanten $ABCD$ et Parallelogram.

4º Naar to modstaaende Sider i en Firkant ere ligestore og parallele f. Ex. $AB =$ og $\neq DC$, da ere ogsaa de to øvrige Sider ligestore og parallele, $AD =$ og $\neq BC$, og altsaa Figuren $ABCD$ et Parallelogram.

Anm. Det kan ogsaa let bevises, at naar de modstaaende Vinkler i en Firkant $ABCD$ ere ligestore, da er Figuren et Parallelogram.

Thi i enhver Fiirkant er Summen af de fire Vinkler ABC + BCD + CDA + DAB = 4 R (№ 147), men, efter Hypothesen er ∠ ABC = CDA, og ∠ BCD = DAB, altsaa ∠ ABC + BCD = 2 R, og ∠ ABC + DAB = 2 R, følgelig (№ 52) AB ≠ CD, og BC ≠ AD; altsaa er Fiirkanten ABCD et Parallelogram.

153— Naar, i et Parallelogram, een Vinkel er skjæv, da ere de alle skjæve, men er een Vinkel ret, da ere de alle rette.

Fig. 137. 1º Lad, i Parallelogrammet AC, ∠ DAB være < R, saa er og den modstaaende Vinkel BCD < R, altsaa ∠ DAB + BCD < 2 R, men Summen af Parallelogrammets fire Vinkler er liig 4 R, altsaa ∠ ABC + ADC > 2 R, og, da disse Vinkler ere ligestore, ∠ ABC > R, ∠ ADC > R; altsaa ere de fire Vinkler skjæve.

Fig. 138. 2º Lad, i Parallelogrammet AC, ∠ DAB være = R, saa er og ∠ BCD = R, nu er Summen af de fire Vinkler liig 4 R, altsaa er og hver af de to øvrige ligestore Vinkler ABC og CDA = R, altsaa ere alle Vinklerne rette.

154— Et Parallelogram er skjævvinklet naar alle Vinklerne ere skjæve, retvinklet, naar alle Vinklerne ere rette.

Man kalder et Parallelogram:

Fig. 137. 1º **Rhomboide**, naar det er skjævvinklet, og de sammenstødende Sider ere uligestore;

Fig. 139. 2º **Rhombus**, naar det er skjævvinklet og ligesidet;

Fig. 138. 3º **Rectangel**, naar det er retvinklet, og de sammenstødende Sider ere uligestore;

Fig. 140. 4º **Qvadrat**, naar det er retvinklet og ligesidet.

Anm. En Rectangel er ligevinklet; et Qvadrat er ligevinklet og ligesidet, altsaa regulær (№ 20, VII).

155— De to Diagonaler i et Parallelogram halvere hinanden.

Ved Diagonalerne AC og BD fremstaae Triangierne ABI Fig.137.
og CDI, som have Siden AB = CD (Nº 152, 2º), ∠ BAI = ICD og ∠ ABI = IDC, fordi AB $\neq$ CD (Nº 54, II), altsaa (Nº 22, Følg.) AI = IC, og BI = ID.

Anm. I en Rhombus ere de to Diagonaler AC, BD Fig.139.
perpendiculære paa hinanden.

Thi, da Triangierne ABI og CBI have Siden AI = IC, Siden AB = BC (Nº 154, 2º), og Siden BI tilfælleds, saa er (Nº 26) ∠ AIB = CIB, og følgelig BD ⊥ AC (Nº 13, II).

156— De to Diagonaler AC, BD, i en Rectangel, Fig.138.
ere ligestore.

Thi Triangierne ABC og DCB have Siden BC tilfælleds, Siden AB = CD, og ∠ ABC = DCB (Nº 154), følgelig er AC = BD (Nº 21, Følg.)

Følg. I. Ved enhver Rectangel kan man omskrive en Cirkel; Diagonalerne ere Diametere, og deres Skjærepunkt Centret. Thi da Diagonalerne ere ligestore og halvere hinanden (Nº 155), saa ligger deres Skjærepunkt I ligelangt fra de fire Vinkelspidser A, B, C og D.

II. De to Diagonaler AC, BD i et Qvadrat ere perpen- Fig.140.
diculære Diametere i den omskrevne Cirkel, og dele Qvadratet i fire congruente Triangler.

157— I ethvert Parallelogram AC er Summen af Fig.137.
Sidernes Qvadrater liig Summen af Diagonalernes Qvadrater.

Thi, da Diagonalerne AC og BD halvere hinanden (Nº 155), saa giver △ ABC

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AI}^2 + 2\,\overline{BI}^2 \quad (\text{Nº } 129)$$

og △ ADC $\quad \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 2\,\overline{AI}^2 + 2\,\overline{DI}^2.$

Adderes disse to Ligninger, saa har man, fordi BI = DI,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 4\,\overline{AI}^2 + 4\,\overline{BI}^2,$$

men $4\overline{AI}^2 = (2\,AI)^2 = \overline{AC}^2$, og $4\overline{BI}^2 = \overline{BD}^2$, altsaa

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.$$

Fig. 138. Anm. Denne Sætning anvendt ved en Rectangel AC følger og af de retvinklede Triangler ABC og BCD ved Hjelp af Sætningen i Nº 125, I, 3º Thi

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

og $\overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2$

altsaa har man, fordi $BC = DA$,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.$$

Fig. 140. Følg. I Qvadratet AC er Siden $AB = BC = CD = DA$, og Diagonalen $AC = BD$ (Nº 156), altsaa $4\overline{AB}^2 = 2\overline{AC}^2$, eller $2\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$, og man har Proportionen

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = 1 : 2$$

hvoraf følger $AB : AC = 1 : \sqrt{2}$

altsaa: *Forholdet mellem Siden og Diagonalen i et Qvadrat er incommensurabelt.*

158— Opg. At finde nærmelsesviis Forholdet mellem Diagonalen og Siden i et Qvadrat.

Fig. 141. I Qvadratet BG skulde Siden CB omføres paa Diagonalen AC saamange Gange som muligt; beskrives derfor fra C som Centrum, med Radius CB, en Halvcirkel, da sees at CB indeholdes een Gang i AC og giver Resten AD. Resultatet af den første Operation er altsaa Qvotienten 1 og Resten AD, som bør sammenlignes med CB eller AB.

Man kunde tage $AF = AD$, og omføre AF paa AB: man vilde da finde, at den indeholdes to Gange og giver en Rest; men da denne og de følgende Rester stedse aftage og snart blive ubemærkelige, saa fører denne Undersøgelse ikke til nogen Slutning, der afgjør om Linierne AC og CB have et Fællesmaal eller ikke. Dette Spørgsmaal opløses derimod let ved Hjelp af Sætningen i Nº 132.

Thi $\angle$ ABC $=$ R, altsaa er AB en Tangent og AE en Secant dragne fra samme Punkt A, og man har

$$AD : AB = AB : AE.$$

Man kan derfor i den anden Operation, hvor AD sammenlignes med AB, istedetfor Forholdet AD : AB, tage AB : AE; men AB eller CD indeholdes to Gange i AE, og giver Resten AD, altsaa er Resultatet af den anden Operation Qvotienten 2 og Resten AD, der skal sammenlignes med AB.

Den tredie Operation, som bestaaer i at sammenligne AD med AB, bringes ligedan hen paa, at sammenligne AB eller CD med AE, og man finder atter Qvotienten 2 og Resten AD.

Man slutter deraf at Operationen aldrig vilde ophøre, og at altsaa Diagonalen og Siden i et Qvadrat ikke have noget Fællesmaal. Denne Sandhed var os allerede bekjendt af Arithmetiken, fordi disse to Linier forholde sig som $\sqrt{2} : 1$ (Nº 157), men den vinder i Tydelighed ved den geometriske Opløsning.

Det er altsaa umuligt at Forholdet mellem Diagonalen og Siden i et Qvadrat kan udtrykkes nøie i Tal; men, ved Hjelp af den tilsvarende Kjedebrøk, kan man finde en Nærmelse, der afviger mindre end enhver given Størrelse. Den første Operation har givet Qvotienten 1; den anden og hver følgende i det Uendelige give 2, altsaa er Forholdet liig Kjedebrøken

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{rc.}}}}}$$

men 1, 2, 2, 2, 2, 2, rc.

give $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$, rc.

Tager man Partialbrøken $\frac{41}{29}$, der afviger mindre end $\frac{1}{29 \times 70}$ eller $\frac{1}{2030}$ fra Hovedbrøken, saa er Forholdet af Diagonalen til Siden i et Qvadrat som 41 : 29, paa mindre end $\frac{1}{2030}$ Deel

nær. Ved at fortsætte Udviklingen kan man stedse finde et Forhold, hvor Feilen er mindre end en given Størrelse.

159— *Naar to Polygoner ere eensvinklede og eenssidede, da ere de congruente.*

Fig.183. Lad Polygonerne ABCDEF og A′B′C′D′E′F′ have ligestore eensbeliggende Vinkler: $\angle A = A'$, $\angle B = B'$, ꝛc., og ligestore eensbeliggende Sider: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, ꝛc.

Bringes den ene Polygon A′B′C′D′E′F′ saaledes paa den anden, at de ligestore Sider A′B′ og AB dække hinanden, da falder, fordi $\angle B' = B$, Siden B′C′ paa BC, men disse ere ligestore, altsaa falder Punktet C′ paa C. Man beviser paa samme Maade, at de øvrige eensbeliggende Vinkelspidser falde paa hinanden, nemlig D′ paa D, E′ paa E, og F′ paa F; altsaa dække Polygonerne hinanden.

Anm. Det er ikke nødvendigt at kjende alle Siderne og alle Vinklerne i en Polygon, for at kunne construere den. Det er tilstrækkeligt, naar Sidernes, altsaa og Vinklernes Antal er n, at kjende $2n - 3$ af disse $2n$ Stykker; men Vinklerne bør her, ligesom ved Triangierne (№ 48, Anm.) ikke regnes høiere end til $n - 1$ givne Stykker, forbi een Vinkel stedse er en Følge af alle de øvrige (№ 147). *F. Ex. en Polygon er bestemt, naar man kjender alle Siderne paa een nær og alle Vinklerne, der indesluttes af de givne Sider.*

Thi, naar man f. Ex. i Sexkanten ABCDEF kjender de 5 Sider AB, BC, CD, DE og EF samt Vinklerne B, C, D og E, da kan Polygonlinien ABCDEF let construeres; men dens Endepunkter A og F kunne forbindes ikkun ved een ret Linie AF, altsaa er og den sjette Side AF og dens hosliggende Vinkler A og F bestemte.

Til en Firkants Construction udfordres altsaa i Almindelighed $2 \times 4 - 3 = 5$ givne Stykker; men er Figuren et Parallelogram da ere to sammenstødende Sider og een Vinkel tilstrækkelige;

thi af een Vinkel følger stedse de øvrige Vinkler, og af to sammenstødende Sider de to øvrige Sider (№ 152).

Følg. I to congruente Polygoner ere de eensbeliggende Diagonaler (som forbinde eensbeliggende Vinkelspidser) ligestore: AC = A′C′, AD = A′D′ ꝛc., og de eensbeliggende Triangler (som dannes af eensbeliggende Sider og Diagonaler) congruente: △ ABC ≅ A′B′C′, △ ACD ≅ A′C′D′, ꝛc.

Thi dække Polygonerne hinanden, da have de eensbeliggende Diagonaler fælleds Endepunkter, og de eensbeliggende Triangler fælleds Vinkelspidser.

160— To Polygoner ere congruente, naar de ere sammensatte af samme Antal eensbeliggende congruente Triangler.

Lad i Polygonerne ABCDEF og A′B′C′D′E′F′ de eensbeliggende Triangler være congruente: △ ABC ≅ A′B′C′, △ ACD ≅ A′C′D′, ꝛc. Fig.138.

Bringes den ene Polygon A′B′C′D′E′F′ saaledes paa den anden, at, ved de to congruente Triangler A′B′C′ og ABC, Punktet A′ falder paa A, B′ paa B, og C′ paa C, da falder ogsaa D′ paa D, fordi Trianglerne A′C′D′ og ACD, ifølge Hypothesen, ere congruente, og have samme Beliggenhed mod deres fælleds Side AC. Man beviser paa samme Maade, at E′ falder paa E, F′ paa F; altsaa dække Polygonerne hinanden.

Følg. Naar en Polygon har n Sider, saa er den sammensat af $n - 2$ Triangler (№ 146), og til en Triangels Construction udfordres tre givne Stykker, men disse Triangler ligge jevnsides, og altsaa, naar een af dem er construeert, giver den een Side til den næste; altsaa er en Polygon bestemt, naar man kjender tre Stykker i een af disse Triangler, og to i hver af øvrige, ialt ved $3 + 2(n - 3) = 2n - 3$ givne Stykker.

161— En Polygon ABCDEF er ogsaa bestemt ved alle de Triangler ABC, ABD, ABE, ꝛc., der fremkomme naar Endepunkterne af en Side AB forbindes med alle de øvrige Vinkelspid- Fig.142.

fer. Har Polygonen n Sider, da ligge $n-2$ Vinkelspidser udenfor Siden AB og altsaa ere der $n-2$ Triangler, som have denne Side tilfælleds; altsaa bliver Polygonen bestemt ved Siden AB og endnu to Stykker i hver af disse Triangler, ialt ved $1+2(n-2)=2n-3$ givne Stykker.

Fig.143. **162—** Opg. At construere et Parallelogram, naar to sammenstødende Sider a og b og deres indesluttede Vinkel A′ ere givne.

Drag en ret Linie $AD=a$, afsæt i A en Vinkel $DAB=A'$, tag $AB=b$, beskriv to Buer, den ene fra Punktet B, som Centrum, med Radius $BC=AD$, den anden fra D, som Centrum, med Radius $DC=AB$, og foreen disse to Buers Skjærepunkt C med B og D. Figuren ABCD er det forlangte Parallelogram.

Thi, ifølge Constructionen ere de modstaaende Sider ligestore, altsaa er Figuren et Parallelogram, og dette er dannet af de givne Sider og den givne Vinkel.

Anm. Naar den givne Vinkel er skjæv og de givne Sider uligestore, da er den tegnede Figur en Rhomboide, men en Rhombus naar Siderne ere ligestore. Var Vinklen derimod ret, da blev Figuren en Rectangel eller et Qvadrat, eftersom Siderne vare uligestore eller ligestore.

163— To ligedannede Polygoner ere sammensatte af samme Antal eensbeliggende ligedannede Triangler.

Og omvendt, naar to Polygoner ere sammensatte af samme Antal eensbeliggende ligedannede Triangler, da ere de ligedannede.

Fig.144. 1º Drag i de ligedannede Polygoner ABCDE og $abcde$, fra et Par eensbeliggende Vinkelspidser A, a, Diagonalerne AC og AD, ac og ad.

Da Polygonerne ere ligedannede, saa ere de eensbeliggende Vinkler ABC og *abc* ligestore, og Siderne AB, BC proportionale med *ab*, *bc*, d. e.

$$AB : ab = BC : bc;$$

altsaa $\triangle ABC \sim abc$, da de have et Par ligestore Vinkler, indsluttede af proportionale Sider (№ 120); følgelig $\angle BCA = bca$, men $\angle BCD = bcd$, altsaa $\angle BCD - BCA = bcd - bca$, eller $\angle ACD = acd$. Trianglerne ABC, *abc* give Proportionen

$$AC : ac = BC : bc$$

men af Polygonernes Ligedannelse følger

$$BC : bc = CD : cd$$

$$\text{altsaa}\quad AC : ac = CD : cd$$

nu er $\angle ACD = acd$, følgelig $\triangle ACD \sim acd$ (№ 120). Man beviser paa samme Maade de følgende eensbeliggende Triangiers Ligedannelse, hvormange Sider Polygonerne endog have; altsaa ere to ligedannede Polygoner sammensatte af samme Antal eensbeliggende ligedannede Triangler.

2º Omvendt naar $\triangle ABC \sim abc$, $\triangle ACD \sim acd$, ɩc. da er Polygonen $ABCDE \sim abcde$.

Thi, de eensbeliggende ligedannede Triangler give $\angle ABC = abc$, $\angle BCA = bca$, $\angle ACD = acd$, altsaa $\angle BCA + ACD = bca + acd$ eller $\angle BCD = bcd$, ligedan $\angle CDE = cde$, $\angle DEA = dea$, ɩc. Endvidere har man

$$AB : ab = BC : bc = AC : ac = CD : cd, \text{ ɩc.}$$

eller, naar man kun tager de Forhold, som indeholde Polygonsiderne,

$$AB : ab = BC : bc = CD : cd, \text{ ɩc.}$$

altsaa ere Polygonerne eensvinklede og deres eensbeliggende Sider proportionale, altsaa $ABCDE \sim abcde$.

Følg. I. Deles to Polygoner ABCDE, *abcde* af Diagonalerne dragne fra et Par eensbeliggende Vinkelspidser A, *a* i samme Antal eensbeliggende ligedannede Triangler: $\triangle ABC \sim$ Fig.145.

abc, △ ACD ∾ *acd*, ꝛc., da deles disse Polygoner ogsaa af Diagonalerne dragne fra et andet Par eensbeliggende Vinkelspidser B, *b*, i samme Antal eensbeliggende ligedannede Triangler: △ BCD ∾ *bcd*, △ BDE ∾ *bde*, ꝛc.

II. I to ligedannede Polygoner ere to hvilkesomhelst eensbeliggende Diagonaler AD, *ad* proportionale med to hvilkesomhelst eensbeliggende Sider BC, *bc* d. e.

$$AD : ad = BC : bc.$$

Fig.145. **164.** To ligedannede Polygoner ABCDE, *abcde* deles af Diagonalerne dragne fra Endepunkterne af et Par eensbeliggende Sider AB, *ab*, i samme Antal eensbeliggende ligedannede Triangler: ABC ∾ *abc*, △ ABD ∾ *abd*, △ ABE ∾ *abe*.

Thi, de ligedannede Polygoner give ∠ ABC = *abc*, og Proportionen

$$AB : ab = BC : bc$$

altsaa △ ABC ∾ *abc* (Nº. 120). Da de eensbeliggende Diagonaler og Sider ere proportionale, saa har man

$$AD : ad = AB : ab = BD : bd$$

altsaa △ ABD ∾ *abd* (Nº. 119); og endelig ∠ BAE = *bae* og

$$AB : ab = AE : ae$$

altsaa △ ABE ∾ *abe*.

Omvendt naar △ ABC ∾ *abc*, △ ABD ∾ *abd*, △ ABE ∾ *abe*, da er Polygonen ABCDE ∾ *abcde*.

Thi, i Trianglerne ABC og *abc* er ∠ BAC = *bac*, og i Trianglerne ABD og *abd* er ∠ BAD = *bad*, altsaa ∠ BAD − BAC = *bad* − *bac*, eller ∠ CAD = *cad*; endvidere give de to første Triangler

$$AC : ac = AB : ab$$

og de to sidste Triangler

$$AD : ad = AB : ab$$

$$\text{altsaa } AC : ac = AD : ad;$$

nu er ∠ CAD = *cad*, altsaa △ ACD ∾ *acd*. Man beviser

ogsaa at $\triangle$ ADE er $\backsim$ *ade*; altsaa ere Polygonerne sammensatte af samme Antal eensbeliggende ligedannede Triangler: ABC $\backsim$ *abc*, ACD $\backsim$ *acd*, ADE $\backsim$ *ade*, altsaa (Nº 163) Polygonen ABCDE $\backsim$ *abcde*.

165— Drages fra et hvilketsomhelst Punkt P rette Linier PA, PB, ꝛc. til Vinkelspidserne i en given Polygon ABCDE, og paa disse Linier tages Længder P*a*, P*b*, ꝛc. proportionale med PA, PB, ꝛc., da haves Vinkelspidserne til en Polygon *abcde* ligedannet med den givne ABCDE. Fig. 146 og 147.

Da, ifølge Hypothesen, P*a* : PA = P*b* : PB, saa er (Nº 120, 112) $\triangle$ P*ab* $\backsim$ PAB, og *ab* $\neq$ AB; man har ogsaa $\triangle$ P*bc* $\backsim$ PBC og *bc* $\neq$ BC, $\triangle$ P*cd* $\backsim$ PCD, og *cd* $\neq$ CD, ꝛc. følgelig (Nº 60) $\angle$ *abc* = ABC, $\angle$ *bcd* = BCD, ꝛc., og

ab : AB = P*b* : PB = *bc* : BC = P*c* : PC = *cd* : CD ꝛc.

eller, naar man kun tager de Forhold, som indeholde Polygonsiderne,

ab : AB = *bc* : BC = *cd* : CD ꝛc.

altsaa ere Polygonerne eensvinklede og deres eensbeliggende Sider proportionale, altsaa Polygonen *abcde* $\backsim$ ABCDE.

166— Opg. Paa en given Linie *ab* at construere en Polygon ligedannet med en given Polygon ABCDE, saa at *ab* og AB ere eensbeliggende Sider. Fig. 144.

Drag, i den givne Polygon, Diagonalerne AC, AD, construeer paa den givne Linie *ab* en Triangel *abc* $\backsim$ ABC (Nº 122), paa *ac* en Triangel *acd* $\backsim$ ACD, og paa *ad* en Triangel *ade* $\backsim$ ADE. Figuren *abcde* er den forlangte Polygon ligedannet med ABCDE.

Thi disse to Polygoner ere sammensatte af samme Antal eensbeliggende ligedannede Triangler (Nº 163).

167— Naar, i to ligedannede Polygoner, to rette Linier MN, *mn* ere eensbeliggende d. v. s. at de danne samme Vinkel med et Par eensbeliggende Sider og dele

disse i proportionale Dele, eller at de dele to Par eensbeliggende Sider i proportionale Dele, saa ere disse Linier MN, *mn* proportionale med de eensbeliggende Sider.

1° Lad Linierne MN og *mn* være dragne saaledes at BM : *bm* $=$ AB : *ab* og $\angle$ NMB $=$ *nmb*, saa er $\triangle$ MBC $\backsim$ *mbc*, fordi $\angle$ B $=$ *b* og BM : *bm* $=$ BC : *bc* (№ 120); altsaa har man

$$MC : mc = BM : bm \text{ eller } = AB : ab$$

og $\angle$ BCM $=$ *bcm*, $\angle$ CMB $=$ *cmb*, men $\angle$ BCN $=$ *bcn* og $\angle$ NMB $=$ *nmb*, altsaa $\angle$ BCN $-$ BCM $=$ *bcn* $-$ *bcm* eller $\angle$ MCN $=$ *mcn*, og $\angle$ NMB $-$ CMB $=$ *nmb* $-$ *cmb* eller $\angle$ CMN $=$ *cmn*; altsaa $\triangle$ MCN $\backsim$ *mcn* (№ 118), og følgelig

$$MN : mn = NC : nc = MC : mc \text{ eller } = AB : ab.$$

2° Lad Punkterne M, *m* og N, *n* være tagne saaledes, at NC : *nc* $=$ BM : *bm* $=$ AB : *ab*, saa ere Trianglerne MCN og *mcn* ligedannede, fordi de have et Par ligestore Vinkler indesluttede af proportionale Sider. Man har nu samme Slutninger som ovenfor, og man beviser let at $\angle$ NMB $=$ *nmb*.

168— To ligedannede Polygoners Perimetre forholde sig som et Par eensbeliggende Sider.

Fig.144. De ligedannede Polygoner ABCDE og *abcde* give denne Række ligestore Forhold,

$$AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea$$

hvoraf følger

$$AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea$$
$$= AB : ab \text{ eller Perim. } ABCDEA : \text{Perim. } abcdea = AB : ab.$$

Følg. Da de eensbeliggende Sider ere proportionale med de eensbeliggende Diagonaler AC, *ac* (№ 63, II), saa har man og

$$\text{Perim. } ABCDEA : \text{Perim. } abcdea = AC : ac.$$

Regulære Polygoner.

169— Regulære Polygoner af samme Antal Sider ere ligedannede Figurer.

Antag at f. Ex. de to Sexkanter ABCDEF, *abcdef* ere Fig.148. regulære d. e. ligevinklede og ligesidede (№ 20, VII), saa ere de og eensvinklede; thi, da de have samme Antal Sider, saa have Vinklerne, i hver af dem, samme Sum $= 8$ R (№ 147), og Vinklen A er $\frac{1}{8}$ af denne Sum, saavelsom Vinklen *a*, altsaa $\angle A = a$, ligedan $\angle B = b$, $\angle C = c$, 2c.

Disse Polygoner have tillige proportionale eensbeliggende Sider; thi, ifølge Hypothesen er $AB = BC = CD$, 2c. og $ab = bc = cd$, 2c., altsaa

$$AB : ab = BC : bc = CD : cd, \text{ 2c.}$$

altsaa (№ 117, II) ere disse Polygoner ligedannede.

Følg. Ved to regulære Polygoner af samme Antal Sider forholde Perimetrene sig som et Par eensbeliggende Sider (№ 168).

Anm. Da en regulær Polygon er ligevinklet, saa bestemmes en indvendig Vinkel ved Sidernes Antal (№ 147, Følg.)

170— Ved enhver regulær Polygon kan man omskrive og indskrive en Cirkel.

Lad ABCDE.. være en regulær Polygon; antag at en Cir- Fig.149. kellinie føres gjennem de tre Vinkelspidser A, B, C; lad O være Centret, og OP Perpendiculæren nedfældet paa Midten af Siden BC; drag AO og OD.

Fiirkanterne OPCD og OPBA kunne dække hinanden. De have nemlig Siden OP tilfælleds, $\angle OPC = OPB$, som rette Vinkler, altsaa falder Siden PC paa PB, Punktet C paa B, fordi $PC = PB$. Endvidere er, ifølge Polygonens Natur, $\angle PCD = PBA$, altsaa tager CD Retningen BA, og, fordi $CD = BA$, falder Punktet D paa A, og de to Fiirkanter dække hinanden. Altsaa er Afstanden $OD = AO$, og følgelig gaaer Cirkellinien, der er ført gjennem de tre Punkter A, B, C,

ogsaa gjennem Punktet D; men ved et fuldkommen lignende Raisonnement bevises, at Cirkellinien, ført gjennem de tre Vinkelspidser B, C, D, ogsaa gaaer gjennem den følgende Vinkelspids E, o. s. fr.; saa at samme Cirkellinie, der gaaer gjennem Punkterne A, B, C, gaaer gjennem alle Vinkelspidserne, og er altsaa omskreven om Polygonen, eller Polygonen indskreven i denne Cirkel (No. 72).

Med Hensyn til denne Cirkel ere alle Siderne AB, BC, CD, ꝛc. ligestore Chorder, der altsaa ligge ligelangt fra Centret (No. 76); altsaa, naar man fra samme Centrum O, og med Radius OP, beskriver en Cirkellinie, saa berører den Siden BC og alle de øvrige Sider af Polygonen, enhver i dens Midtepunkt; og denne Cirkellinie er derfor indskreven i Polygonen, eller Polygonen omskreven om denne Cirkel (No. 77).

Anm. I. Punktet O, fælleds Centrum for den indskrevne og den omskrevne Cirkel, kunne ogsaa betragtes som Polygonens Centrum, og af denne Grund kalder man **Centrivinkel** en Vinkel AOB, dannet af to Radier dragne til Endepunkterne af en Side AB.

Da alle Chorderne AB, BC, ꝛc. ere ligestore, saa ere og Buerne AB, BC, ꝛc. ligestore (No. 67, II), og altsaa Centrivinklerne AOB, BOC, ꝛc. ligestore (No. 90), men Summen af alle Centrivinklerne er liig 4 R (No. 18, III), altsaa er hver af dem $= \frac{4\,R}{n}$, naar n betegner Antallet af Polygonens Sider.

Altsaa er en Centrivinkel i den indskrevne ligesidede Triangel liig $\frac{4}{3}$ R, i Qvadratet liig R, i den regulære Femkant liig $\frac{4}{5}$ R, i Sexkanten liig $\frac{2}{3}$ R, i Aattekanten liig $\frac{1}{2}$ R, i Tikanten liig $\frac{2}{5}$ R, ꝛc.

Anm. II. Forlanges der, i en given Cirkel, at indskrive en regulær Polygon af et opgivet Antal Sider, saa gaaer det fornemmeligen ud paa, at dele Peripherien i dette Antal ligestore Dele; thi, naar Buerne ere ligestore, da ere ogsaa Chorderne AB,

BC, rc. ligestore, og Vinklerne ABC, BCD, rc. ligestore, som Peripherievinkler paa ligestore Buer, nemlig hele Peripherien minus een af de ligestore Buer ABC, BCD, rc.; altsaa er Figuren ABCDE.. en regulær Polygon.

Anm. III. Den omskrevne Cirkels Radius OA kaldes ogsaa Polygonens største Radius, og den indskrevne Cirkels Radius: Polygonens mindste Radius.

171— Opg. I en given Cirkel at indskrive et Qvadrat.

Drag to Diametre AC, BD, perpendiculære paa hinanden, Fig. 150. og foreen Endepunkterne A, B, C, D. Figuren ABCD er et indskrevet Qvadrat; thi da Vinklerne AOB, BOC, rc. ere ligestore, saa ere og Chorderne AB, BC ligestore, og Vinklerne ABC, BCD, rc. ere ligestore, fordi de ere rette (Nº 93, II).

Anm. Da Trianglen AOB er retvinklet og ligebenet, saa har man (Nº 125, I) $\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AO}^2$, følgelig $AB : AO = \sqrt{2} : 1$, d. v. s. et indskrevet Qvadrats Side forholder sig til Radius som $\sqrt{2}$ til 1.

172— Opg. I en given Cirkel at indskrive en regulær Sexkant og en ligesidet Triangel.

Antag Problemet opløst, og lad AB være en Side i den Fig. 151. indskrevne Sexkant; drag Radierne AO, BO.

$\triangle$ AOB er ligesidet; thi Centrivinklen $AOB = \frac{2}{3} R$ (Nº 170, I), altsaa $\angle ABO + BAO = 2R - \frac{2}{3}R = \frac{4}{3}R$, men $\angle ABO = BAO$, fordi $AO = BO$ (Nº 27), altsaa $\angle ABO = BAO = \frac{2}{3}R = AOB$, og følgelig er $\triangle$ AOB ligesidet (Nº 28, Følg.); altsaa er den indskrevne Sexkants Side lig Radius.

Deraf følger, at Peripherien deles, naar Radius føres om samme, i sex ligestore Dele, og at Delingspunkterne altsaa ere Vinkelspidserne til den indskrevne regulære Sexkant.

Naar Sexkanten ABCDEF er indskreven, og hver anden Vinkelspids forenes, saa fremstaaer den ligesidede Triangel ACE.

173. Opg. I en given Cirkel at indskrive en regulær Tikant, Femkant og Femtenkant.

Fig. 152. Deel Radius AO, ved Punktet M, i yderste og mellemste Forhold (№ 144); tag det største Stykke OM og før det om i Peripherien, saa deles denne i 10 ligestore Dele AB, BC, &c., og altsaa er Chorden AB en Side i den indskrevne regulære Tikant.

Thi drages BM, da har man, ifølge Constructionen, AO : OM = OM : AM eller, fordi AB = OM, AO : AB = AB : AM, altsaa △ ABO ∼ AMB, da deres fælleds Vinkel A er indesluttet af proportionale Sider (№ 120). Men △ ABO er ligebenet, altsaa har △ AMB, Siden AB = BM, men AB = OM, altsaa BM = OM, og △ BMO er ligebenet, følgelig ∠ O = MBO. Derfor er den udvendige Vinkel AMB = = 2 O, men ∠ AMB = MAB; altsaa er △ ABO saaledes dannet, at hver af de ved Basis liggende Vinkler OAB eller OBA er = 2 O; altsaa er Summen af de tre Vinkler i denne Triangel liig 5 O, og følgelig ∠ O $= \frac{2R}{5} = \frac{4R}{10}$. Altsaa er Buen AB liig $\frac{1}{10}$ af Peripherien, og Chorden AB er Siden i den regulære Tikant.

Følg. I. Forenes hver anden Vinkelspids i den regulære Tikant, saa danner man den regulære Femkant ACEGI.

II. Naar AB er Siden i Tikanten og AL Siden i Sexkanten, da er ⌒ BL $= \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ eller $\frac{1}{15}$ af Peripherien, og Chorden BL er Siden i den regulære Femtenkant. Man har tillige ⌒ CL $= \frac{1}{2}$ CB.

Anm. Naar en regulær Polygon er indskreven, altsaa Peripherien deelt i ligestore Dele, og man halverer hver af disse Dele, saa har man alle Vinkelspidserne til en regulær Polygon af det dobbelte Antal Sider; altsaa kunne Quadratet tjene til at ind-

skrive regulære Polygoner af 8, 16, 32, ꝛc. Sider, Sexkanten til Polygoner af 12, 24, 48, ꝛc. Sider, Tikanten til Polygoner af 20, 40, 80, ꝛc. Sider, Femtenkanten til Polygoner af 30, 60, 120, ꝛc. Sider.*)

174. Opg. Man har givet en indskreven regulær Polygon ABCD..., og der forlanges, ved samme Cirkel, at omskrive en lignende Polygon. Fig. 158.

Halveer enhver af Buerne AB, BC, CD ꝛc., og drag fra hvert Delingspunkt M, N, P, ꝛc. en Tangent, saa fremstaaer en omskreven regulær Polygon A′B′C′D′..., ligedannet med den indskrevne Polygon ABCD...

De tre Punkter O, B, B′ ligge i een ret Linie; thi de retvinklede Triangler OMB′ og ONB′ have fælleds Hypotenus OB′ og Catheten OM = ON, altsaa △ OMB′ ≅ ONB′ (Nº 43), og følgelig ∠ MOB′ = B′ON, altsaa gaaer Linien OB′ gjennem Punktet B, Midten af Buen MN. Af samme Grund ligger Punktet C′ i Forlængringen af OC, Punktet D′ i Forlængringen af OD, ꝛc. Men A′B′ ∦ AB og B′C′ ∦ BC (Nº 80), altsaa ∠ A′B′C′ = ABC (Nº 60), ligedan ∠ B′C′D′ = BCD, ∠ C′D′E′ = CDE ꝛc.; altsaa ere disse to Polygoner eensvinklede, og, da den indskrevne er ligevinklet, saa er den omskrevne Polygon det ogsaa. Fremdeles har man, paa Grund af samme Paralleler,

$$A'B' : AB = OB' : OB$$

og $$B'C' : BC = OB' : OB$$

altsaa $$A'B' : AB = B'C' : BC$$

men AB = BC, altsaa A′B′ = B′C′; ligedan B′C′ = C′D′, ꝛc. altsaa er den omskrevne Polygon ligesidet; altsaa er denne Polygon regulær og ligedannet med den givne indskrevne Polygon.

---

*) Pr. Gauss har beviist at man i Almindelighed kan indskrive en regulær Polygon af $2^n + 1$ Sider, naar $2^n + 1$ er et Primtal; deraf følger først den regulære 17-Kant o. s. fr.

Følg. I. Naar en omskreven regulær Polygon A′B′C′D′... er givet, og der forlanges, i samme Cirkel, at indskrive en lignende Polygon, saa drager man, fra Centret til Vinkelspidserne A′, B′, C′ ꝛc., Linierne OA′, OB′, OC′ ꝛc., der skjære Peripherien i Punkterne A, B, C, ꝛc., og forener disse Punkter ved Chorderne AB, BC, CD ꝛc.: disse danne den forlangte indskrevne regulære Polygon ABCD..., ligedannet med den omskrevne Polygon A′B′C′D′...

Forener man Berøringspunkterne M, N, P, ꝛc. ved Chorderne MN, NP ꝛc., da har man ogsaa en indskreven regulær Polygon MNPQ.. ligedannet med den omskrevne Polygon A′B′C′D′.

II. Man kan altsaa, ved en given Cirkel, omskrive alle de regulære Polygoner, som man veed at indskrive i denne Cirkel, og omvendt.

175— Ved regulære Polygoner af samme Antal Sider forholde Perimetrene sig som Radierne af de omskrevne eller indskrevne Cirkler.

Fig.154 Lad AB være Siden til en regulær Polygon, O dens Centrum, altsaa OA Radius til den omskrevne Cirkel, og OD, ⊥ AB, Radius til den indskrevne Cirkel; lad *ab* være Siden til en anden Polygon ligedannet med den første, *o* dens Centrum, *oa* og *od* Radierne til den omskrevne og den indskrevne Cirkel.

De to Polygoners Perimetre forholde sig som Siderne AB og *ab* (Nº. 169, Følg.); men ∠ A = *a* som Halvdele af et Par eensbeliggende Vinkler i disse ligedannede Polygoner, og, af samme Grund, ∠ B = *b*, altsaa ere Triaanglerne ABO og *abo* ligedannede, saavelsom de retvinklede Triangler ADO og *ado*, og man har følgeligen

$$AB : ab = AO : ao = DO : do,$$

altsaa forholde Perimetrene sig som Radierne AO, *ao* af de omskrevne Cirkler, eller som Radierne DO, *do* af de indskrevne Cirkler.

Følg. Diametrene ere det Dobbelte af Radierne, altsaa forholde disse Polygoners Perimetre sig ogsaa som Diametrene af de omskrevne eller indskrevne Cirkler.

176— Ved to concentriske Cirkler kan man stedse i den Større indskrive, og om den Mindre omskrive en regulær Polygon, hvis Sider ikke træffe Peripherien af den anden Cirkel, saa at, i det ene eller andet Tilfælde, den beskrevne Polygons Sider ere indesluttede mellem begge Peripherierne.

Lad de to Cirklers Radier være CA og CB. Drag, fra Punktet A, Tangenten DE, hvis Endepunkter ligge i den større Peripherie; indskriv i den større Cirkel een af de regulære Polygoner, som man, af de foregaaende Opgaver, veed at indskrive; halveer hver af de Buer, som Siderne afskjære, og foreen hvert Delingspunkt med de to nærmest liggende Vinkelspidser, saa har man en regulær Polygon af det dobbelte Antal Sider. Vedbliv saaledes at halvere Buerne indtil Buen er mindre end DBE. Lad MBN være denne Bue, hvis Midte antages at være i B, saa ligger Chorden MN længere fra Centret end DE, og altsaa ville Siderne af den regulære Polygon, hvis ene Side er MN, ikke kunne træffe Peripherien af den Cirkel, hvis Radius er CA. Fig.155.

Men, naar MN er Siden i denne regulære Polygon, indskreven i den større Cirkel, og man drager Linierne CM og CN, der skjære Tangenten DE i Punkterne P og Q, saa er PQ Siden i en lignende Polygon, omskreven ved den mindre Cirkel, og denne omskrevne Polygons Sider ville ikke kunne træffe den større Peripherie, fordi CP < CM.

Man kan altsaa, ved samme Construction, indskrive en regulær Polygon i den større Cirkel, og omskrive en lignende Polygon ved den mindre Cirkel, hvilke have deres Sider indesluttede mellem de to Peripherier.

177— Ved Cirkler forholde Peripherierne sig som Radierne, eller som Diametrene.

Fig. 156. Ved Cirklerne beskrevne med Radierne om og OM, hvis Peripherier, for Korthed Skyld, være betegnede ved Periph. om, Periph. OM, har man

$$\text{Periph. } om : \text{Periph. } OM = om : OM.$$

Thi, hvis denne Proportion var urigtig, saa maatte til de tre Led om, OM, Periph. om, kunne findes et fjerde Led, der enten var $>$ eller $<$ Periph. OM; antag at det er mindre, at

$$om : OM = \text{Periph. } om : \text{Periph. } ON.$$

Indskriv i Cirklen OM en regulær Polygon ABCD..., hvis Sider ikke træffe Peripherien ON (Nº 176), og indskriv en lignende Polygon $abcd$... i Cirklen om; lad deres Perimetre være betegnet ved P og p, saa har man, fordi Polygonerne ere ligedannede, denne Proportion

$$p : P = om : OM \quad (\text{Nº } 175)$$

men $om : OM = \text{Periph. } om : \text{Periph. } ON$, ifølge Hypothesen,

altsaa $p : P = \text{Periph. } om : \text{Periph. } ON$

men denne Proportion er umulig, fordi $p <$ Periph. om og P $>$ Periph. ON (Nº 24, Anm.); altsaa er det umuligt, at om : OM = Periph. om : en Peripherie $<$ Periph. OM.

Man slutter heraf, at man heller ikke kunne have

$$om : OM = \text{Periph. } om : \text{en Peripherie} > \text{Periph. } OM;$$

thi deraf vilde følge, at

$$OM : om = (\text{en Peripherie} > \text{Periph. } OM) : \text{Periph. } om$$

eller, hvilket var det Samme,

$$OM : om = \text{Periph. } OM : (\text{en Peripherie} < \text{Periph. } om)$$

men dette er, ifølge det førte Raisonnement, umuligt.

Da nu det fjerde Led i Proportionen om : OM = Periph. om : X er ikke $<$ og ikke $>$ Periph. OM, saa maa det være = Periph. OM; altsaa forholde Cirklers Peripherier sig som Radierne, eller som Diametrene, da disse ere det Dobbelte af Radierne.

Følg. I. Ligedannede Buer AB, *ab* d. e. Buer der Fig.157. svare til ligestore Centrivinkler C, *c*, forholde sig som Radierne CA, *ca*.

Thi $\angle C : 4R = \frown AB$: Periph. CA (№ 92)

og $\angle c : 4R = \frown ab$: Periph. *ca*

men, ifølge Hypothesen, $\angle C = c$, altsaa

$\frown AB : \frown ab$ = Periph. CA : Periph. *ca* = CA : *ca*.

II. Af ovenstaaende Sætning følger ogsaa at Forholdet af Peripherien til Diameteren er eens ved alle Cirkler. Kjendte man dette Forhold, som betegnes ved π, da kunde man let beregne Peripherien af en Cirkel, hvis Diameter eller Radius var givet; og omvendt finde dens Diameter eller Radius, naar Peripherien var givet. Lad Cirklens Radius være betegnet ved r, og dens Peripherie ved p, saa er

$$p = 2r\pi, \text{ og følgelig } 2r = \frac{p}{\pi}, \; r = \frac{p}{2\pi}.$$

Tages Diameteren $2r$ til Eenhed, da er $p = \pi$, men naar $r = 1$, da er $p = 2\pi$ eller $\frac{1}{2}p = \pi$, altsaa:

det constante Tal π udtrykker Peripherien af en Cirkel hvis Diameter er 1, eller den halve Peripherie, naar Radius er 1.

178— Opg. En regulær Polygons største og mindste Radius ere givne, og der forlanges at finde største og mindste Radius til den regulære Polygon af samme Perimeter og det dobbelte Antal Sider.

Lad AB være den halve Side i en regulær Polygon, og C Fig.158. Centret, altsaa CA Polygonens største Radius, og CB dens mindste Radius. Forlængre BC, tag CD = CA, drag AD, fæld fra C Perpendiculæren CE ned paa AD, og fæld fra E Perpendiculæren EF ned paa BD; saa er EF den halve Side i den regulære Polygon af samme Perimeter og dobbelt saamange Sider som den første Polygon.

Thi, ifølge Constructionen, er Trianglen ACD ligebenet, følgelig $\angle D = CAD$ (№ 27), men $\angle D + CAD = ACB$ (№ 45, VII) altsaa $\angle D = \frac{1}{2} ACB$; tillige er $DE = EA$. Nu er $EF \neq AB$, fordi de begge ere $\perp BD$, altsaa $\triangle DAB \sim DEF$ (№ 118, I), følgelig har man Proportionen

$$DA : DE = AB : EF,$$

men $DE = \frac{1}{2} DA$, altsaa $EF = \frac{1}{2} AB$, nu er $\angle D = \frac{1}{2} ACB$, altsaa er EF den halve Side i den regulære Polygon af samme Perimeter og dobbelt saamange Sider som den regulære Polygon, hvis halve Side er AB. Altsaa er DE største Radius og DF mindste Radius i den første Polygon.

Sættes $CA = R$, $CB = r$, $DE = R'$ og $DF = r'$ saa ere R og r givne, og der skulde søges R' og r'.

1º De ligedannede Triangler DAB og DEF give Proportionen

$$DA : DE = DB : DF$$

men $DE = \frac{1}{2} DA$, altsaa $DF = \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2} (CA + CB)$, fordi $DC = CA$, altsaa $r' = \frac{1}{2} (R + r)$.

2º Den retvinklede Triangel CED giver $\overline{DE}^2 = DC \times DF$ eller $R'^2 = R \times r'$; altsaa er den søgte største Radius R' Mellemproportionalstørrelsen til R og r', og da r' alt er bestemt, saa finder man let R'; man har $R' = \sqrt{Rr'}$ eller $\sqrt{R \times \frac{1}{2}(R + r)}$. Det er altsaa let, ved Hjelp af den givne Polygons største og mindste Radius, R og r, at finde største og mindste Radius R' og r', til Polygonen af samme Perimeter og det dobbelte Antal Sider.

179. Opg. At finde en Cirkel, hvis Peripherie afviger saalidet som man vil fra Perimeteren af en given regulær Polygon.

Fig. 159. Lad der være givet en regulær Sexkant ABCD... Fæld fra Centret O Perpendiculæren OP ned paa Siden AB, og drag OA.

Cirklen beskreven med Radius OP er indskreven, og Cirklen beskreven med Radius OA er omskreven ved denne Sexkant; den første Cirkels Peripherie er mindre, og den anden Cirkels Peripherie er større end Sexkantens Perimeter (№ 24, Anm.); men det gaaer her ud paa, at bringe disse Grændser nærmere sammen.

Tag O*a* og O*b* hver liig Mellemproportionallinien til OA og $\frac{1}{2}$(OA + OP), og drag *ab*, saa er *ab* Siden i den regulære Tolvkant af samme Perimeter som Sexkanten ABCD.. (№ 178). Foretag samme Construction ved hver af de 12 Triangler, i hvilke Sexkanten deles af Linierne dragne fra Centret til alle Vinkelspidserne og til Midten af hver Side, saa har man denne Tolvkant *abcd*... Cirklen beskreven med Radius O*p*, ⊥ *ab* og = $\frac{1}{2}$(OA + OP), er indskreven, og Cirklen beskreven med Radius O*a* er omskreven ved Tolvkanten; den Førstes Peripherie er mindre og den Andens Peripherie er større end Perimeteren af den givne Sexkant, og Differensen mellem disse to Peripherier er mindre end ved de to foregaaende. Thi, da O*p* = $\frac{1}{2}$(OA + OP) og OA > OP, saa er O*p* > OP, altsaa Periph. O*p* > Periph. OP (№ 177), men $\overline{Oa}^2$ = OA × $\frac{1}{2}$(OA + OP) viser, at O*a* < OA, følgelig Periph. O*a* < Periph. OA, altsaa Periph. O*a* — Periph. O*p* < Periph. OA — Periph. OP.

Dersom man paa hver af Siderne O*a* og O*p* i den retvinklede Triangel O*pa* afsætter, fra O, en Længde liig Mellemproportionallinien til O*a* og $\frac{1}{2}$(O*a* + O*p*), og foretager samme Construction ved de øvrige lignende Triangler i Tolvkanten *abcde*.., saa danner man en regulær 24-Kant af samme Perimeter som den givne Sexkant. Den indskrevne Cirkels Peripherie er mindre, den omskrevne Cirkels Peripherie er større end den givne Sexkants Perimeter, og Differensen af disse to Peripherier er endnu mindre end ved de foregaaende.

Man kunde saaledes vedblive indtil Differensen af største og mindste Radius er saa liden som man ønsker, og man anseer da

Peripherien af Cirklen, beskreven med den ene eller den anden af disse to Radier, at være liig Perimeteren af den givne Sexkant.

Anm. Betegnes den givne Sexkants og de efterhaanden fundne Polygoners mindste og største Radius ved

$$r, R \mid r', R' \mid r'', R'' \mid r''', R''' \mid \text{ic.}$$

saa bliver altsaa Opgaven reduceret til at finde disse Radier, hvilket er meget let; thi mellem Radierne af en hvilkensomhelst af disse Polygoner og den følgende Polygon, der har dobbelt saa mange Sider, f. Ex. mellem Radierne r', R' og r'', R'' har man Relationerne

$$r'' = \tfrac{1}{2}(r' + R') \text{ og } R'' = \sqrt{R'r''}.$$

Man finder altsaa efterhaanden disse Radier; man vedbliver saalænge indtil Differensen mellem de to Radier ved samme Polygon er saaliden som man ønsker, og man anseer da Peripherien af Cirklen, beskreven med den ene eller den anden af disse to Radier, at være liig Perimeteren af Sexkanten, eller den givne Polygon.

Denne Methode kunne let udføres ved Linier, idet man afvexlende søger den halve Sum og Mellemproportionallinien til bekjendte Linier; men det er endnu bedre at operere med Tal, der saaledes afgiver een af de beqvemmeste Maader, som den elementære Geometrie frembyder, til *nærmelsesviis at finde Forholdet af Peripherien til Diameteren.*

Lad Siden i den regulære Sexkant være liig 1, altsaa Perimeteren liig 6, saa er denne Polygons største Radius $OA = 1$ (Nº 172), og mindste Radius $OP = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866025$. Sæt altsaa $R = 1$, $r = 0{,}866025$, saa finder man Tolvkantens Radier $r' = \tfrac{1}{2}(1 + 0{,}866025) = 0{,}933013$ og $R' = \sqrt{1 \cdot 0{,}933013} = 0{,}965925$, hvilke tjene til at beregne 24-Kantens Radier o. s. f.

Polygoner Sidernes Antal	mindste Radius r, r', r'' &c.	største Radius R, R', R'' &c.
6	0,866025	1,000000
12	0,933013	0,965925
24	0,949469	0,957662
48	0,953566	0,955610
96	0,954588	0,955100
192	0,954844	0,954972

Naar, ved Beregning af en største Radius, i det mindste det halve Antal Ziffere fra venstre er eens ved de to foregaaende Radier, da kan man tage den arithmetiske, istedetfor den geometriske Mellemproportionalstørrelse, og alle følgende Radier blive saaledes beregnede paa samme Maade, som giver

384	0,954908	0,954940
768	0,954924	0,954932
1536	0,954928	0,954930
3072	0,954929	0,954929

Den sidste Polygons Radier afvige ikke fra hinanden i det Antal Ziffere, som vi her ville ansee tilstrækkeligt, og vi betragte derfor Peripherien af Cirklen, beskreven med Radius $\varrho = 0,954929$, at være liig den givne Polygons Perimeter 6, altsaa $2\pi\varrho = 6$, følgelig, naar Værdien for ϱ indsættes, finder man $\pi = 3,14159$.

Man kunde saaledes have fundet en Værdie, der laae endnu nærmere. Man erholder

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ldots$$

som, ved Hjelp af Kjedebrøken, giver følgende Nærmelser

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \text{\&c.}$$

der ere afvexlende mindre og større end det sande Forhold af Peripherien til Diameteren.

Tager man for π Brøken $\frac{22}{7}$ eller $3\frac{1}{7}$, hvilket anvendes ofte i Kunsterne, da er Feilen $< \frac{1}{7 \times 106}$ eller $< 0,0014$. Ved

Forholdet $\frac{355}{113}$ ere allerede de 6 første Decimaler nøiagtige, og frembringer en Feil mindre end 1''' paa Peripherien af en Cirkel beskrevet med en Radius af 6000 Alen.

Vi kunne nu ogsaa beregne Længden af en Bue. Lad Buen
Fig.153. AMB være en n^{te} Deel af Peripherien, eller Centrivinklen AOB $= \frac{4R}{n}$, og α Antallet af dens Grader, saa finder man denne Bues Længde z af Proportionen

$$180^0 : \alpha = \pi R : z$$

som giver $z = \frac{\pi R \alpha}{180} = \frac{2\pi R}{n}$.

II. Figurers Fladeindhold.

180— En Figurs Fladeindhold udtrykkes ved et Tal, der angiver hvormange Gange Flade-Eenheden, *Maalet*, indeholdes i denne Figur. At finde dette Tal er at *udmaale* Figuren.

181— Ligesom ved Triangler tages i et Parallelogram en hvilkensomhelst Side til *Grundlinie, Basis.* Parallelogrammets *Høide* er en Perpendiculær nedfældet paa Grundlinien fra et hvilketsomhelst Punkt i den modstaaende Side.

Grundlinien i et Trapezium er een af de parallele Sider, og Høiden en Perpendiculær mellem disse to Sider.

Triangler, Parallelogrammer, Trapezier, der staae mellem Parалleler have ligestore Høider (№ 62); og omvendt naar saadanne Figurer have ligestore Høider, da kunne de bringes mellem samme Paralleler. Fig. 160.

182— Parallelogrammer med ligestore Grundlinier og ligestore Høider ere ligestore.

Lad Parallelogrammerne være AC og AE, der have fælleds Grundlinie AB og samme Høide, saa ligge Siderne DC og FE, modstaaende til Grundlinien AB, i een og samme Linie, parallel med AB. Men, ifølge Parallelogrammernes Natur, er Siden $DC = AB$ og $FE = AB$, altsaa $DC = FE$ og, naar CF lægges til begge Sider, $DF = CE$, man har og $AD = BC$, og $AF = BE$, altsaa $\triangle ADF \cong BCE$ (№ 26). Trækkes nu fra Firkanten ABED eengang $\triangle BCE$, en anden Gang $\triangle ADF$, saa har man Parall. AC = Parall. AE. Fig. 161.

Følg. Et hvilketsomhelst Parallelogram AC er ligestort med en Rectangel AE, der har samme Grundlinie og samme Høide. Fig. 162.

Fig.163. **183— En hvilkensomhelst Triangel ABC er halv saa stor som et Parallelogram BD, der har samme Grundlinie og samme Høide.**

Thi Trianglerne ABC og ACD ere ligestore (№ 152).

Følg. I. Altsaa er Trianglen ABC halv saa stor som Rectanglen BE, der har samme Grundlinie og samme Høide; thi Rect. BE = Parall. BD.

II. Triangler med ligestore Grundlinier og ligestore Høider ere ligestore.

184— To Rectangler med ligestore Grundlinier forholde sig som deres Høider.

Fig.164. Lad de to Rectangler AC og EG have ligestore Grundlinier AB = EF. Høiderne AD og EH kunne nu enten være commensurable eller incommensurable. Antag det første, at

AD : EH = 7 : 4.

Deles AD i 7 ligestore Dele, saa er een af disse Dele Aa Fællesdsmaalet, som, bragt paa EH, deler denne i 4 ligestore Dele, og drages gjennem alle Delingspunkterne Paralleler med Grundlinien, saa er den første Figur deelt i 7 og den anden i 4 ligestore Rectangler, fordi de alle have ligestore Grundlinier og ligestore Høider (№ 182); altsaa forholde Rectanglerne AC og EG sig som 7 : 4 eller som AD : EH. Da samme Raisonnement kunne føres ved ethvert andet Forhold end 7 : 4, forudsat at det er commensurabelt, saa har man

Rect. AC : Rect. EG = AD : EH.

Fig.165. Men ogsaa naar Høiderne AD, EH ere incommensurable forholde Rectanglerne AC og EG, med ligestore Grundlinier AB, EF, sig som Høiderne. Thi, hvis Proportionen

Rect. AC : Rect. EG = AD : EH

ei fandt Sted, da havde man til de tre første Led et fjerde Led, der enten var større eller mindre end EH. Antag at det er større, at

Rect. AC : Rect. EG = AD : EO. (1)

Dersom man deler AD i ligestore men mindre Dele end HO, og fører een af dem paa EO, saa fremstaaer i det mindste eet Delingspunkt I mellem H og O; drag gjennem dette Punkt I en Linie IK parallel med EF, saa har man, fordi Høiderne AD og EI ere commensurable,

Rect. AC : Rect. EK = AD : EI (2)

altsaa, da Proportionerne (1) (2), have samme foregaaende Led, skulle

Rect. EG : Rect. EK = EO : EI

hvilket er umuligt, forbi EG < EK og EO > EI; altsaa er det umuligt, at

Rect. AC : Rect. EG = AD : en Linie > EH.

Man beviser, ved et fuldkommen lignende Raisonnement, at det fjerde Led i denne Proportion er heller ikke < EH, altsaa er det = EH.

Altsaa, hvorban Forholdet af Høiderne endog er, maae dog stedse to Rectangler med ligestore Grundlinier forholde sig som deres Høider.

185— To hvilkesomhelst Rectangler AC og AF forholde sig som Producterne af Grundlinie og Høide, d. e. Fig.166.

Rect. AC : Rect. AF = AB × AD : AE × AG.

Rectanglerne AC og AH, der have samme Grundlinie AB, forholde sig som Høiderne AD, AG, og Rectanglerne AH og AF, der have samme Grundlinie AG, forholde sig som Høiderne AB, AE (Nº 184), altsaa har man de to Proportioner

Rect. AC : Rect. AH = AD : AG

Rect. AH : Rect. AF = AB : AE.

Multipliceer Led for Led, og borttag den fælleds Factor AH af Ledene i første Forhold, saa haves

Rect. AC : Rect. AF = AB × AD : AE × AG.

Anm. Divideres Ledene i sidste Forhold med AB $\times$ AD, saa har man

$$\text{Rect. AC} : \text{Rect. AF} = 1 : \frac{AE}{AB} \times \frac{AG}{AD}$$

hvoraf følger, at, naar Rectanglen AC tages til Eenhed, da udtrykkes Fladeindholdet af Rectanglen AF ved Productet af de to Tal, der angive Forholdet af Grundlinierne AE, AB, og Forholdet af Høiderne AG, AD.

Lad f. Ex., naar *ab* er Liniemaalet, AB være $= 6$, AD $= 5$, AE $= 7$ og AG $= 4$, saa har man

$$\text{Rect. AC} : \text{Rect. AF} = 1 : \tfrac{7}{6} \times \tfrac{4}{5} \text{ eller } 1 : \tfrac{28}{30};$$

altsaa er Fladeindholdet af Rectanglen AF $= \frac{28}{30}$, naar AC er Flademaalet.

Men det er simplere at udmaale en Rectangel med et Qvadrat *ac*, hvis Side *ab* er Liniemaalet; thi, da $ab = ad = 1$, giver Proportionen

$$\text{Qv. } ac : \text{Rect. AF} = 1 : \frac{AE}{ab} \times \frac{AG}{ad}$$

$$\text{Rect. AF} = AE \times AG$$

altsaa: Fladeindholdet af en Rectangel er liig Productet af Grundlinien og Høiden d. v. s. Rectanglen indeholder Qvadratet, hvis Side er Liniemaalet, lige saamange Gange, som der ere Eenheder i Productet af de to Tal, der udtrykke Grundliniens Forhold og Høidens Forhold til Liniemaalet.

Naar Liniemaalet *ab* indeholdes f. Ex. 7 Gange i Grundlinien AE og 4 Gange i Høiden AG, da indeholder Rectanglen AF Qvadratet *ac*, hvis Side er *ab*, $7 \times 4 = 28$ Gange, og altsaa udtrykkes denne Rectangels Fladeindhold ved 28.

En Rectangels Fladeindhold er altsaa liig Productet af to sammenstødende Sider: ere nu disse ligestore, da er Figuren et Qvadrat, og altsaa dets Fladeindhold liig anden Potens af Siden. Naar, ved Qvadratet MP, Siden MN indeholder Liniemaalet *ab* tre Gange, da er dette Qvadrats Fladeindhold liig $3^2 = 9$ d. e. Qvadratet MP indeholder Qvadratet *ac* ni Gange.

Ligesom vi udtrykke en Rectangel ved Productet af to Linier eller rettere Productet af to Tal, og et Qvadrat ved anden Potens af en Linie eller anden Potens af et Tal, saaledes kunne vi omvendt fremstille Productet af to Linier, eller af to Tal, ved en Rectangel, og anden Potens af en Linie, eller af et Tal, ved et Qvadrat. Derfor kunne ogsaa alle de foregaaende Sætninger, hvori forekomme Productet af to Linier, og anden Potens eller Qvadratet af en Linie, omsættes i denne Betydning; f. Ex. Sætningen № 130 saaledes: naar to Chorder skjære hinanden, da ere Rectanglerne af hver Chordes to Stykker ligestore; og Sætningen № 132 saaledes: Qvadratet construeert paa Tangenten er liig Rectanglen af hele Secanten og det udenfor Cirklen liggende Stykke.

Ligedan: Productet af to Tal 7×4 kan fremstilles ved en Rectangel, hvor to sammenstødende Sider indeholde Liniemaalet 7 Gange, og 4 Gange; og Tallet $9 = 3^2$ ved et Qvadrat, hvor Siden indeholder Liniemaalet 3 Gange. Det er saaledes ved en geometrisk Betragtning at Benævnelsen Qvadrat er overført i Arithmetiken, for at betegne Productet af et Tal multipliceert med sig selv.

186— **Et hvilketsomhelst Parallelograms Fladeindhold er liig Productet af Grundlinien og Høiden.**

Thi, Parall. $AC =$ Rect. AE, der har samme Grundlinie og samme Høide (№ 182, Følg.), men Rect. $AE = AB \times BE$ (№ 185), altsaa Parall. $AC = AB \times BE$. Fig.162.

Følg. Parallelogrammer paa ligestore Grundlinier forholde sig som Høiderne, og Parallelogrammer med ligestore Høider forholde sig som Grundlinierne; thi ved tre hvilkesomhelst Størrelser A, B, C har man, i Almindelighed, $A \times C : B \times C = A : B$.

187— **En Triangels Fladeindhold er liig det halve Product af Grundlinien og Høiden.**

Fig.166. Thi $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ Parall. BD, der har samme Grundlinie og samme Høide (№ 183), men Parall. BD = BC ⋌ AG, (№ 186), altsaa $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ BC ⋌ AG = BC ⋌ $\frac{1}{2}$ AG.

Følg. To Triangler med ligestore Grundlinier forholde sig som Høiderne, og to Triangler med ligestore Høider forholde sig som Grundlinierne.

188— To Triangler, der have et Par ligestore Vinkler, forholde sig som Rectanglerne af Siderne, der indeslutte disse Vinkler.

Fig.167. Da Trianglerne ABC og ADE have Vinklen A tilfælleds, saa skulle

$$\triangle ABC : \triangle ADE = AB \times AC : AD \times AE.$$

Drag BE. Da Trianglerne ABE og ADE, med fælleds Toppunkt E, have samme Høide, saa forholde de sig som Grundlinierne AB, AD (№ 187, Følg.); og, af samme Grund, forholde Trianglerne ABC og ABE sig som Grundlinierne AC, AE, altsaa har man

$$\triangle ABE : \triangle ADE = AB : AD$$

og $\triangle ABC : \triangle ABE = AC : AE.$

Multipliceer Led for Led, og borttag ABE af Ledene i første Forhold, saa haves

$$\triangle ABC : \triangle ADE = AB \times AC : AD \times AE.$$

Følg. Altsaa ere de to Triangler ligestore, naar Rect. (AB ⋌ AC) = Rect. (AD ⋌ AE) eller, dersom man har

$$AB : AD = AE : AC;$$

hvilket finder Sted, naar Linien DC er ≠ BE.

189— Opg. At dele et Parallelogram eller en Triangel i to Dele, der forholde sig som $m : n$.

Fig.168. 1º Lad AC være Parallelogrammet. Deel Siden AB saaledes at AE : EB = $m : n$ (№ 114), og drag, fra Delingspunktet E, Linien EF ≠ AD, saa er Parallelogrammet deelt i to Dele AF og EC, der forholde sig som $m : n$.

Thi Parallelogrammerne AF og EC, der have samme Høide, forholde sig som Grundlinierne AE og EB, altsaa som $m:n$ (№ 186, Følg.)

2° Ligedan deles Triangle ABC i to Dele, der forholde sig som $m:n$, naar Grundlinien AB deles, ved Punktet E, i dette Forhold, og Punktet E forenes med Toppunktet C; thi Trianglerne ACE og BCE, der have samme Høide, forholde sig som Grundlinierne AE og EB, altsaa som $m:n$ (№ 187, Følg.)

Anm. Naar $m = n$, altsaa AE = EB, da er Parallelogrammet, eller Triangelen, deelt i to ligestore Dele; thi disse ere da Parallelogrammer, eller Triangler, med ligestore Grundlinier og ligestore Høider.

Det indsees let, at man, paa samme Maade, kunde dele et Parallelogram eller en Triangel i 3, 4, 5... ligestore Dele, eller Dele, der staae i givne Forhold til hinanden.

190— Opg. At dele en Triangel ABC i tre ligestore Dele, ved Linier der støde sammen i et givet Punkt D i Siden AB. Fig.169.

Deel AB i tre ligestore Dele; drag DC, og, parallel med denne, fra Delingspunkterne E og F, Linierne EG, FH, og foreen D med G og med H, saa dele Linierne DG, DH Triangelen ABC i tre ligestore Dele.

Thi, da EG ≠ DC, saa er △ AEC = ADG (№ 188, Følg.) men △ AEC = $\frac{1}{3}$ ABC, fordi, med samme Høide, Grundlinien AE = $\frac{1}{3}$ AB (№ 187, Følg.), altsaa er og △ ADG = $\frac{1}{3}$ ABC. Man har ogsaa △ BDH = $\frac{1}{3}$ ABC, altsaa maae og den tredie Deel, Fiirkanten CGDH være = $\frac{1}{3}$ ABC.

Anm. Man har en fuldkommen lignende Construction og samme Beviis, naar Triangelen forlanges deelt i 4, 5, 6... ligestore Dele, ved Linier der udgaae fra Punktet D.

Fig. 170. 191— Fladeindholdet af et Trapezium ABCD er liig Productet af Høiden EF og den halve Sum af de parallele Sider AB og CD.

Drag, gjennem Midten I af Siden BC, Linien KL parallel med den modstaaende Side AD, og forlængre DC indtil den træffer KL.

Trianglerne IBL og ICK have Siden IB $=$ IC, ifølge Constructionen, $\angle$ LIB $=$ CIK (Nº 18), $\angle$ IBL $=$ ICK, fordi CK $\neq$ BL (Nº 54, II, 2º), altsaa $\triangle$ IBL $\cong$ ICK (Nº 22); altsaa Trap. ABCD $=$ Parall. AK $=$ EF $\times$ AL (Nº 186). Men AL $=$ DK (Nº 152), og, fordi $\triangle$ IBL $\cong$ ICK, Siden BL $=$ CK, altsaa AB $+$ CD $=$ AL $+$ DK $=$ 2 AL og følgelig AL $= \frac{AB + CD}{2}$, altsaa er Fladeindholdet af Trapeziet ABCD $=$ EF $\times \frac{AB + CD}{2}$.

Anm. Drages, fra Midten I af Siden BC, Linien IH $\neq$ Grundlinien AB, da er H Midten af Siden AD; thi BI : IC $=$ AH : HD (Nº 110), men BI $=$ IC, altsaa AH $=$ HD. Nu er HI $=$ AL $= \frac{AB + CD}{2}$, altsaa er Fladeindholdet af Trapeziet ABCD $=$ EF $\times$ HI, d. e. Fladeindholdet af et Trapezium er liig Productet af Høiden og Linien, der forener de ikke parallele Siders Midtepunkter.

192— En hvilkensomhelst Polygon kan deles i Triangler, altsaa finder man dens Fladeindhold, ved at udmaale hver af disse Triangler, og tage Summen af Resultaterne.

193— En Figur forvandles, naar man danner en anden af en opgiven Form, der har samme Fladeindhold.

En Figur qvadreres, naar den forvandles til et Qvadrat. Opløsningen er den givne Figurs Qvadratur.

194— Opg. At qvadrere et givet Parallelogram, eller en given Triangel.

Fig. 171. 1º Lad AC være det givne Parallelogram, AB Grundlinien og DE Høiden. Søg til Linierne AB og DE Mellempro-

portionallinien XY (Nº 126), og construeer paa XY et Qvadrat (Nº 162), saa er dette ligestort med Parallelogrammet AC. Thi, ifølge Constructionen, har man

$$AB : XY = XY : DE$$

altsaa $\overline{XY}^2 = AB \times DE$, men $AB \times DE$ udtrykker Fladeindholdet af Parallelogrammet AC (Nº 186), og $\overline{XY}^2$ Fladeindholdet af Qvadratet XZ (Nº 185), altsaa Qv. XZ = Parall. AC.

2º Lad ABC være den givne Triangel, BC Grundlinien og AD Høiden. Søg til BC og $\frac{1}{2}$ AD Mellemproportionallinien XY, da har Qvadratet construeert paa XY samme Fladeindhold som Trianglen ABC. Fig. 172.

Thi af $BC : XY = XY : \frac{1}{2} AD$ følger $\overline{XY}^2 = BC \times \frac{1}{2} AD$, men $BC \times \frac{1}{2} AD$ udtrykker Fladeindholdet af Trianglen ABC (Nº 187), altsaa er Qvadratet paa XY ligestort med $\triangle$ ABC.

195— Opg. At forvandle et givet Qvadrat Q til en Rectangel, i hvilken to sammenstødende Sider have én given Sum AB. Fig. 173.

Beskriv paa AB, som Diameter, en Halvcirkel, drag parallel med AB, i en Afstand AD liig Siden i det givne Qvadrat, Linien DE, der skjærer Peripherien i E, og fæld fra dette Punkt Perpendiculæren EF ned paa Diameteren AB; saa deles denne i to Dele AF, FB, hvilke ere to sammenstødende Sider i den søgte Rectangel.

Thi deres Sum er liig AB, og deres Rectangel ($AF \times FB$) er liig Qvadratet af EF (Nº 125, II), eller Qvadratet af AD, altsaa er denne Rectangel ligestor med det givne Qvadrat Q.

Anm. Opgaven er umulig naar Afstanden AD er større end Radius, d. v. s. naar Siden i det givne Qvadrat Q er større end Halvdelen af Linien AB.

Fig. 174. 196— **Opg.** At forvandle et givet Qvadrat Q til en Rectangel, i hvilken to sammenstødende Sider have en given Differens AB.

Beskriv paa AB, som Diameter, en Cirkel, opreis, paa Enden af Diameteren, Tangenten AD liig Siden i det givne Qvadrat Q, og drag, fra Punktet D gjennem Centret O, Secanten DF; saa er DF og DE to sammenstødende Sider i den forlangte Rectangel.

Thi deres Differens er liig Diameteren EF eller AB, og deres Rectangel ($DF \times DE$) er liig $\overline{AD}^2$ (№ 132), altsaa er denne Rectangel ligestor med det givne Qvadrat Q.

Fig. 175. 197— **Opg.** At forvandle en given Rectangel BC til en anden Rectangel med en given Side AD.

Søg til de tre Linier AD, AB, AC den fjerde Proportionallinie AX (№ 115), og construeer Rectanglen af Linierne AD, AX; saa er denne Rectangel DX ligestor med den givne Rectangel BC.

Thi af $AD : AB = AC : AX$ følger $AD \times AX = AB \times AC$, altsaa Rect. DX = Rect. BC.

Fig. 176. 198— **Opg.** At finde to Linier, der forholde sig som Rectanglen af de to givne Linier A og B til Rectanglen af de to givne Linier C og D.

Lad X være den fjerde Proportionallinie til de tre Linier B, C, D; saa er Forholdet af Linierne A og X liig Forholdet af Rectanglerne ($A \times B$) og ($C \times D$).

Thi man har $B : C = D : X$, følgelig $C \times D = B \times X$, altsaa $A \times B : C \times D = A \times B : B \times X = A : X$.

Følg. For at finde Forholdet af Qvadraterne paa de givne Linier A og C, søger man tredie Proportionallinie X til Linierne A og C (№ 115), altsaa $A : C = C : X$, hvoraf følger $C^2 = A \times X$, altsaa $A^2 : C^2 = A^2 : A \times X = A : X$.

199. Opg. At finde to Linier, der forholde sig som Productet af de tre givne Linier A, B, C til Product af de tre givne Linier M, N, P. Fig. 177.

Søg til de tre Linier M, A, B, den fjerde Proportionallinie X, og til de tre Linier C, N, P, den fjerde Proportionallinie Y; saa forholde de to Linier X og Y sig som Producterne $A \times B \times C$ og $M \times N \times P$.

Thi af $M : A = B : X$ følger $A \times B = M \times X$ som, multipliceert med C paa begge Sider, giver

$$A \times B \times C = C \times M \times X;$$

og af $C : N = P : Y$ følger $N \times P = C \times Y$, som, multipliceert med M paa begge Sider, giver

$$M \times N \times P = M \times C \times Y,$$

altsaa $A \times B \times C : M \times N \times P = C \times M \times X : M \times C \times Y = X : Y$.

200. Opg. At forvandle en given Polygon til en Triangel. Fig. 178.

Lad ABCDE være den givne Polygon. Drag Diagonalen CE, der afskjærer Triangle CDE; drag fra Punktet D, parallel med CE, Linien DF, der træffer Forlængringen af AE i F, saa har man Fiirkanten ABCF ligestor med den givne Femkant ABCDE.

Thi Trianglerne CDE og CFE have fælleds Grundlinie CE og ligestore Høider, fordi Toppunkterne D og F ligge i en Linie DF, som er parallel med Grundlinien, altsaa $\triangle CDE = CFE$ (№ 183, II). Læg til begge Sider Figuren ABCE, saa har man Femkanten ABCDE = ABCF.

Man kunne ligedan istedetfor Trianglen ABC, substituere Trianglen AGC og saaledes forvandle Fiirkanten ABCF, altsaa og Femkanten ABCDE til en Triangel GCF.

Samme Construction kunne udføres ved enhver anden Polygon; thi ved hver Gang at forvandle Figuren til en anden, der har een Side færre, fremstaaer tilsidst den forlangte Triangel.

Anm. Da enhver Triangel kan qvadreres (№ 194), saa kan man ogsaa finde et Qvadrat ligestort med en hvilkensomhelst given Polygon.

Fig.179. **201—** Naar en Linie AC er deelt i to Dele AB, BC, da er Qvadratet paa hele Linien AC liig Qvadratet paa Stykket AB, plus Qvadratet paa Stykket BC, plus to Gange Rectanglen af begge Stykkerne AB, BC, d. e.

$$\overline{AC}^2 \text{ eller } (AB + BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC.$$

Construeer Qvadratet ACDE, tag $AF = AB$, drag $FG \neq AC$ og $BH \neq AE$.

Qvadratet er deelt i fire Dele: den første ABIF er Qvadratet paa AB, fordi $AF = AB$; den anden IGDH er liig Qvadratet paa BC, thi, da $AC = AE$ og $AB = AF$, saa er $AC - AB = AE - AF$ eller $BC = EF$, men, paa Grund af Parallelerne, er $IG = BC$ og $DG = EF$, altsaa er IGDH liig Qvadratet paa BC. Drages disse to Dele fra Qvadratet ACDE, saa bliver tilovers de to Rectangler BCGI, EFIH, der, hver især, er $= AB \times BC$, altsaa

$$\overline{AC}^2 \text{ eller } (AB + BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC.$$

Anm. Denne Sætning fremstiller geometrisk Formationen af et Binoms Qvadrat, der algebraisk udtrykkes ved

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab.$$

Fig.180. **202—** Qvadratet paa Linien AC, Differensen af Linierne AB og BC, er liig Qvadratet paa AB, plus Qvadratet paa BC, minus to Gange Rectanglen af AB og BC, d. e.

$$\overline{AC}^2 \text{ eller } (AB - BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB \times BC.$$

Construeer Qvadratet ABIF, tag $AE = AC$, drag $CG \neq BI$, $HK \neq AB$, og fuldend Qvadratet EFLK.

Hver af de to Rectangler CBIG, GLKD er $= AB \times BC$, og naar de begge drages fra Figuren ABILKE, da bliver

Qvadratet paa AC tilovers, men Figuren ABILKE er liig Summen af Qvadraterne paa AB og paa EF eller BC, altsaa

$$\overline{AC}^2 \text{ eller } (AB - BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\, AB \times BC.$$

Anm. Denne Sætning afbilder den algebraiske Formel

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab.$$

203. Rectanglen af to Liniers Sum og Differens er liig Differensen af disse to Liniers Qvadrater; man har saaledes Fig. 181.

$$(AB + BC) \times (AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2.$$

Construeer paa AB Qvadratet ABIF, og paa AC Qvadratet ACDE, forlængre AB et Stykke BK = BC, og fuldend Rectanglen AKLE.

Denne Rectangels Grundlinie AK er = AB + BC og dens Høide AE = AB − BC, altsaa

$$\text{Rect. } AKLE = (AB + BC) \times (AB - BC)$$

men AKLE = ABHE + BHLK, og BHLK = EDGF, fordi BH = DE, og BK = EF, altsaa AKLE = ABHE + EDGF, men ABHE + EDGF = ABIF − DHIG, og DHIG er liig Qvadratet paa BC, altsaa

$$(AB + BC) \times (AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2.$$

Anm. Denne Sætning afbilder den algebraiske Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

204. Qvadratet BG, construeert paa Hypotenusen af en retvinklet Triangel ABC, er liig Summen af Qvadraterne AH og AI, construeerte paa Catheterne.*) Fig. 182.

Fæld fra den rette Vinkels Toppunkt A en Perpendiculær AD ned paa Hypotenusen og forlængre den til E; drag Diagonalerne AF og CH.

*) Vi kunne være berettiget til at ansee denne Sætning allerede beviist; thi ifølge № 125, I er $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, og, ifølge № 185, Anm., udtrykke $\overline{BC}^2$, $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$ Fladeindholdet af Qvadraterne paa BC, AB, AC; men, da den er een af Geometriens Hovedsætninger fremsættes her et Beviis hentet alene fra Betragtning af Flader, uden at tage Liniers Forhold til Hielp.

Trianglerne ABF og HBC have ∠ ABF = HBC, fordi hver især er sammensat af ∠ ABC og en ret Vinkel CBF eller ABH, endvidere AB = BH, som Sider i samme Qvadrat, og, af samme Grund, BF = BC, altsaa △ ABF ≅ HBC (Nº 21).

Trianglen ABF er halv saa stor som Rectanglen BE, fordi de have samme Grundlinie BF og ligestore Høider, da AE ≠ BF (Nº 183, I). Trianglen HBC er halv saa stor som Qvadratet AH; thi, da ∠ BAC = R = BAL, saa er CAL en ret Linie (Nº 16) parallel med BH, altsaa have Trianglen HBC og Qvadratet AH, der staae paa samme Grundlinie BH, ligestore Høider, altsaa △ HBC = ½ AH, men △ HBC = ABF = ½ BE, altsaa Rect. BE = Qv. AH. Man beviser, paa samme Maade, Rect. DG = Qv. AI, men de to Rectangler BE og DG udgjøre tilsammen Qvadratet BG, altsaa er Qvadratet BG, construeert paa Hypotenusen, liig Summen af Qvadraterne AH og AI, construeerte paa Catheterne; eller, saaledes udtrykt $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Følg. I. Altsaa er Qvadratet paa den ene Cathete liig Differensen af Qvadraterne paa Hypotenusen og den anden Cathete; saaledes $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

Fig. 188. II. Drages, i Qvadratet ABCD, Diagonalen AC, saa har man en retvinklet ligebenet Triangel ABC, altsaa $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AB}^2$, d. e. Qvadratet paa Diagonalen AC er dobbelt saa stor som Qvadratet paa Siden AB.

Denne Egenskab bliver øiensynlig, naar man, gjennem Punkterne A og C, drager Linierne HE, GF, parallel med Diagonalen DB, og, gjennem Punkterne D og B, Linierne HG, EF, parallel med Diagonalen AC; thi man danner saaledes et nyt Qvadrat EFGH, som er Qvadratet paa Diagonalen, og som indeholder 8 ligestore Triangler, hvorimod Qvadratet ABCD ikkun indeholder 4 af disse Triangler, altsaa er Qvadratet EFGH dobbelt saa stort som Qvadratet ABCD.

III. Det er beviist at Qvadratet AH = Rect. BE, men Fig.182.
Qvadratet BG og Rectanglen BE, der have samme Grundlinie BF, forholde sig som Høiderne BC og BD (№ 184), altsaa

$$\text{Qv. BG} : \text{Qv. AH} \text{ eller } \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 = BC : BD.$$

Man har ligedan $\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 = BC : CD$

d. e. Qvadratet paa Hypotenusen forholder sig til Qvadratet paa en Cathete, som hele Hypotenusen til Stykket, der ligger mellem denne Cathete og Perpendiculæren, fældet fra Toppunktet ned paa Hypotenusen (jevnf. № 125, I, 2°.).

IV. Rectanglerne BE og DG, der have samme Grundlinie DE, forholde sig som Høiderne BD og CD, men disse Rectangler ere ligestore med Qvadraterne AH og AI, altsaa

$$\text{Qv. AH} : \text{Qv. AI} \text{ eller } \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : CD$$

d. e. Qvadraterne paa Catheterne forholde sig som de hosliggende Stykker af Hypotenusen (jevnf. № 125, I, 1°.).

205— Opg. At construere et Qvadrat liig Summen eller Differensen af to givne Qvadrater.

Lad A og B være Siderne til de givne Qvadrater. Fig.184.

1° Naar det søgte Qvadrat skal være liig Summen af disse Qvadrater, saa construeer en ret Vinkel DEF, tag ED = A og EG = B, drag DG; saa er DG Siden til det søgte Qvadrat.

Thi, da Trianglen DEG er retvinklet, saa er Qvadratet paa Hypotenusen DG liig Summen af Qvadraterne paa ED og EG eller paa A og B (№ 204).

2° Dersom det søgte Qvadrat skal være liig Differensen af de givne Qvadrater, saa construeer, som før, en ret Vinkel FEH, tag EG liig den mindste af de givne Sider A og B, og fra G som Centrum, med en Radius GH liig den anden givne Side, beskriv en Bue, som skjærer EH i et Punkt H; saa er Qvadratet paa EH liig Differensen af Qvadraterne paa A og B.

Thi Trianglen GEH er retvinklet, Hypotenusen GH = A og Catheten EG = B, altsaa er Qvadratet paa Catheten EH liig Differensen af Qvadraterne paa GH og EG eller paa A og B (Nº 124, I).

Anm. Man kan saaledes stedse finde et Qvadrat liig Summen af et hvilketsomhelst Antal givne Qvadrater; thi Constructionen, som reducerer to Qvadrater til eet, reducerer saaledes tre til to, der atter kunne reduceres til eet o. s. f. Dette vilde ogsaa finde Sted naar nogle af Qvadraterne skulde drages fra Summen af de øvrige.

Fig.185. **206— Opg. At construere et Qvadrat, der forholder sig til et givet Qvadrat AC som Linien M til Linien N.**

Drag en ret Linie EG, tag EF = M og FG = N; beskriv paa EG, som Diameter, en Halvcirkel, opreis i F Perpendiculæren FH, drag fra H Chorderne HG og HE og forlængre dem; tag, paa den første, HK liig Siden AB i det givne Qvadrat, og drag, fra K, Linien KI ≠ GE; saa er HI Siden i det søgte Qvadrat.

Thi, da KI ≠ GE, saa har man

$$HI : HK = HE : HG \quad (\text{Nº } 111)$$

$$\text{altsaa } \overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 = \overline{HE}^2 : \overline{HG}^2$$

men, da Trianglen EHG er retvinklet (Nº 93, II), saa forholder sig Qvadratet paa HE til Qvadratet paa HG som EF til FG (Nº 124, IV), eller som M til N, altsaa

$$\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 = M : N.$$

Men HK = AB, altsaa forholder sig Qvadratet paa HI til Qvadratet paa AB som M til N.

207— Ligedannede Polygoners Fladeindhold forholde sig som Qvadraterne af et Par eensbeliggende Sider.

1º Lad Figurerne være to Triangler ABC, *abc*, i hvilke Fig. 136. $\angle A = a$, $\angle B = b$, saa har man, paa Grund af de ligestore Vinkler A, *a*, (Nº 188),

$$\triangle ABC : \triangle abc = AB \times AC : ab \times ac$$

og, da Trianglerne ere ligedannede,

$$AB : ab = AC : ac$$

$$\text{men}\quad AC : ac = AC : ac.$$

Multipliceer Led for Led, saa har man

$$AB \times AC : ab \times ac = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$$

$$\text{altsaa}\ \triangle ABC : \triangle abc = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2.$$

2º To ligedannede Polygoner ABCDE og *abcde* deles ved Fig. 144. Diagonalerne AC, AD, *ac*, *ad*, i eensbeliggende ligedannede Triangler ABC $\sim$ *abc*, ACD $\sim$ *acd*, ADE $\sim$ *ade* (Nº 163), altsaa

$$\triangle ABC : \triangle abc = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$$

$$\triangle ACD : \triangle acd = \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2$$

$$\triangle ADE : \triangle ade = \overline{DE}^2 : \overline{de}^2.$$

Men af Polygonernes Ligedannelse følger

$$BC : bc = CD : cd = DE : de$$

$$\text{altsaa}\ \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2 = \overline{DE}^2 : \overline{de}^2,$$

hvilket beviser at der er samme Forhold mellem hvert Par eensbeliggende Triangler, altsaa

$$\triangle ABC : abc = \triangle ACD : acd = \triangle ADE : ade$$

hvoraf følger

$$\triangle ABC + ACD + ADE : \triangle abc + acd + ade =$$

$$\triangle ABC : \triangle abc = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$$

$$\text{eller Polyg. } ABCDE : \text{Polyg. } abcde = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Samme Raisonnement finder Sted hvilket Antal Sider Polygonerne endog have, altsaa forholde to ligedannede Polygoners Fladeindhold sig som Qvadraterne af et Par eensbeliggende Sider.

Følg. Da regulære Polygoner af samme Antal Sider ere ligedannede (Nº 169) saa forholde deres Fladeindhold sig som Qva-

draterne af de eensbeliggende Sider, altsaa og som Qvadraterne af Radierne til de omskrevne eller indskrevne Cirkler, thi disse Radier ere proportionale med de eensbeliggende Sider (№ 175).

208— Opg. Der er givet to ligedannede Figurer, og der forlanges en Figur ligedannet med de givne og ligestor med deres Sum eller Differens.

Lad A og B være to eensbeliggende Sider i de givne Figurer; søg et Qvadrat liig Summen eller Differensen af Qvadraterne construeerte paa A og B (№ 205); lad X være Siden i dette Qvadrat, saa er, i den søgte Figur, X den Side, der er eensbeliggende med A og B i de givne Figurer; og man construerer altsaa paa X en Figur ligedannet med een af de givne (№ 166).

Thi de ligedannede Figurer forholde sig som Qvadraterne paa deres eensbeliggende Sider (№ 207), og Qvadratet paa Siden X er liig Summen eller Differensen af Qvadraterne paa A og B, eensbeliggende med X, altsaa er den paa X construeerte Figur, der er ligedannet med Figurerne paa A og B, liig disse to Figurers Sum eller Differens.

209— Opg. At construere en Figur ligedannet med en given Figur, og som forholder sig til denne som M til N.

Naar Siden A i den givne, og Siden X i den søgte Figur ere eensbeliggende, da bør Qvadratet paa X forholde sig til Qvadratet paa A som M til N (№ 207). Man finder altsaa X som i № 206, og, naar X er bekjendt, da udføres Resten som i № 166.

Fig.187. **210— Opg. At construere en Figur ligedannet med Figuren P og ligestor med Figuren Q.**

Forvandle Figurerne P og Q til Qvadrater (№ 200): Lad M være Siden i det første, og N Siden i det andet Qvadrat; søg til de tre bekjendte Linier M, N, AB den fjerde Proportionallinie X (№ 115), og construeer paa X, eensbeliggende med AB,

en med P ligedannet Figur Y; saa er denne Figur ligestor med Figuren Q.

Thi, paa Grund af Ligedannelsen, forholder sig

$$P : Y = \overline{AB}^2 : X^2$$

men $AB : X = M : N$ følgelig $\overline{AB}^2 : X^2 = M^2 : N^2$, altsaa

$$P : Y = M^2 : N^2$$

Nu er, ifølge Constructionen $M^2 = P$ og $N^2 = Q$, altsaa

$$P : Y = P : Q$$

hvoraf følger $Y = Q$. Altsaa er Figuren Y ligedannet med Figuren P og ligestor med Figuren Q.

211— En regulær Polygons Fladeindhold er liig Productet af Perimeteren og den halve Radius til den indskrevne Cirkel.

Lad A'B'C'D'... være en regulær Polygon og O Centret. Fig.153.
Polygonen kan deles i saamange Triangler A'OB', B'OC', ꝛc., som den har Sider; og disse Triangler ere ligestore, fordi de have ligestore Grundlinier A'B', B'C', ꝛc., og ligestore Høider OM, ON, ꝛc., Radier i den indskrevne Cirkel. Een af disse Triangler A'OB' er liig Grundlinien $A'B' \times \frac{1}{2} OM$, altsaa er Summen af alle disse Triangler eller Polygonen A'B'C'D'... liig Summen af Grundlinierne A'B', B'C', ꝛc. eller Polygonens Perimeter multipliceert med $\frac{1}{2}$ OM, Radius af den indskrevne Cirkel.

Denne Radius er Polygonens mindste Radius, altsaa kan man og sige: **en regulær Polygons Fladeindhold er liig det halve Product af dens Perimeter og mindste Radius.**

212— En Cirkels Fladeindhold er liig Productet af Peripherien og den halve Radius. Fig.188.

Saaledes er Fladeindholdet af Cirklen, hvis Radius er CA, eller, for Kortheds Skyld, Cirk. CA $= \frac{1}{2}$ CA $\times$ Periph. CA.

Thi dersom $\frac{1}{2}$ CA $\times$ Periph. CA ikke udtrykte Fladeindholdet af Cirk. CA, da var denne Størrelse Maalet for en større eller

mindre Cirkel. Antag at den er Maalet for en større Cirkel, at f. Ex. $\frac{1}{2}$ CA $\times$ Periph. CA = Cirk. CB.

Beskriv om Cirklen CA en regulær Polygon DEFG..., hvis Sider ikke træffe Peripherien af Cirklen CB (No 176). Denne Polygons Fladeindhold er liig Perimeteren (DE + EF + FG + 2c.) multipliceert med $\frac{1}{2}$ AC (No 211), men dens Perimeter er større end den indskrevne Cirkels Peripherie (No 24, Anm.), altsaa er denne Polygons Fladeindhold større end $\frac{1}{2}$ AC $\times$ Periph. CA, som, ifølge Hypothesen, er Maalet for Cirklen CB; altsaa skulde Polygonen være større end denne Cirkel. Men den er derimod mindre, thi den er kun en Deel af denne Cirkelflade, altsaa er det umuligt at $\frac{1}{2}$ CA $\times$ Periph. CA kan være > Cirk. CA, eller, almindeligere, det er umuligt at en Cirkels Peripherie multipliceert med dens halve Radius kan være Maalet for en større Cirkel.

Dette Product kan heller ikke være Maalet for en mindre Cirkel. For ikke at forandre Figur, saa lad det være Cirklen CB hvorved altsaa skulle bevises, at $\frac{1}{2}$ CB $\times$ Periph. CB ikke kunne være Maalet for en mindre Cirkel, f. Ex. Cirklen CA.

Thi antag, at man virkelig kunne have $\frac{1}{2}$ CB $\times$ Periph. CB = Cirk. CA. Beskriv som ovenfor Polygonen DEFG... hvis Fladeindhold er = (DE + EF + FG + 2c.) $\times$ $\frac{1}{2}$ CA, saa er, fordi Perimeteren (DE + EF + FG + 2c.) < Periph. CB, denne Polygons Fladeindhold < $\frac{1}{2}$ CA $\times$ Periph. CB, altsaa endnu < $\frac{1}{2}$ CB $\times$ Periph. CB, som, ifølge Hypothesen, er Maalet for Cirklen CA; altsaa skulde Polygonen være mindre end den indskrevne Cirkel, hvilket er umuligt. Altsaa er det umuligt at en Cirkels Peripherie multipliceert med dens halve Radius kan være Maalet for en mindre Cirkel.

Altsaa: Productet af en Cirkels Peripherie og dens halve Radius udtrykker denne Cirkels Fladeindhold.

Følg. Da Cirk. CA $= \frac{1}{2}$ CA $\times$ Periph. CA, og Periph. CA $= \pi \times 2$ CA (№ 177, II), saa er Cirk. CA $= \pi \times \overline{CA}^2$, altsaa: **en Cirkels Fladeindhold er liig Productet af dens Radius's Qvadrat og det constante Tal π, der udtrykker Forholdet af Peripherien til Diameteren, eller Længden af Peripherien naar Diameteren er 1.**

Ligedan ved Cirklen, hvis Radius er CB, har man Cirklen CB $= \pi \times \overline{CB}^2$, altsaa

Cirk. CA : Cirk. CB $= \pi \times \overline{CA}^2 : \pi \times \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$

d. e. **Cirklers Fladeindhold forholde sig som Radiernes Qvadrater.**

Anm. I. Da Cirklen er liig Rectanglen af Peripherien og den halve Radius, og denne Rectangel kan forvandles til et Qvadrat, hvis Side er Mellemproportionallinien til Rectanglens Grundlinie og Høide (№ 194), saa er Cirklens Qvadratur afhængig af at finde Peripherien af en Cirkel, hvis Radius er givet, hvilket atter beroer paa at bestemme det constante Forhold π af Peripherien til Diameteren. Dette Forhold har man hidtil kun nærmelsesviis kunnet bestemme (№ 179), og altsaa kan man heller ikke strængt nøiagtig opløse Fortidens berømte Opgave, Cirklens Qvadratur; men den Feil som man begaaer, kan ikke komme i Betragtning ved nogensomhelst Anvendelse.

Anm. II. Da Cirklers Fladeindhold forholde sig som Radiernes Qvadrater, eller som Diameternes Qvadrater, saa kan man stedse, ved Hjelp af Opgaven i № 208, finde en Cirkel liig Summen eller Differensen af givne Cirkler.

213. **To Sectorer ABC, ADC i samme eller ligestore Cirkler forholde sig som Buerne AB, AD.** Fig. 77.

Thi Sectorerne ABC, ADC forholde sig som Vinklerne ACB, ACD, og disse som Buerne AB, AD (№ 90-92), altsaa forholde Sectorerne ABC, ADC sig som Buerne AB, AD.

Følg. I. Sectoren ABC : Cirk. CA $=\frown$ AB : Periph. CA eller $=\frown AB \times \frac{1}{2} CA : \frac{1}{2} CA \times$ Periph. CA, men Cirk. CA $= \frac{1}{2}$ CA $\times$ Periph. CA, altsaa Sectoren ABC $=\frown AB \times \frac{1}{2} CA$, altsaa: en Sectors Fladeindhold er liig Productet af dens Bue og den halve Radius.

Fig. 157. II. Naar to Sectorer ABC, *abc* i forskjellige Cirkler have ligestore Centrivinkler ACB, *acb*, i hvilket Tilfælde de siges at være ligedannede, da forholde deres Fladeindhold sig som Qvadraterne af Radierne CA, *ca*. Thi,

Sect. ABC : Cirk. CA $= \angle C : 4R$

og Sect. *abc* : Cirk. *ca* $= \angle c : 4R$

men $\angle C = c$, altsaa

Sect. ABC : Sect. *abc* = Cirk. CA : Cirk. *ca*

men Cirk. CA : Cirk. *ca* $= \overline{CA}^2 : \overline{ca}^2$ (Nº 212)

altsaa Sect. ABC : Sect. *abc* $= \overline{CA}^2 : \overline{ca}^2$

altsaa forholde ligedannede Sectorers Fladeindhold sig som Radiernes Qvadrater.

Anm. Fladeindholdet af Segmentet ABMA findes ved at drage Fladeindholdet af Trianglen ABC fra Fladeindholdet af Sectoren AMBC. Trianglen ABC $= \frac{1}{2} AC \times BD$ (Nº 187), naar BD $\perp$ AC, altsaa

$$\text{Segm. ABMA} = AMB \times \frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} AC \times BD$$
$$= (AMB - BD) \times \frac{1}{2} AC$$

d. e. Fladeindholdet af et Segment ABMA er liig Differensen af Buen AMB og Perpendiculæren BD,*) multipliceert med den halve Radius AC.

*) Perpendiculæren, fældet fra en Bues ene Endepunkt ned paa Radius draget til Buens andet Endepunkt, forekommer i Trigonometrien under Navnet Sinus til denne Bue.

Stereometrie.

I. Planer og rette Linier.

214— Ligger en Deel af en ret Linie i en Plan, saa ligger hele Linien deri.

Thi naar en ret Linie har to Punkter tilfælleds med en Plan, saa ligger, ifølge Definitionen (№ 2, IV), denne Linie aldeles i Planen.

Anm. For at undersøge om en Flade er plan, bringer man en ret Linie, i flere forskjellige Retninger, paa samme, og efterseer hvergang om den i hele sin Udstrækning falder sammen med Fladen.

215— To hinanden overskjærende rette Linier ligge i een Plan og bestemme denne Plans Beliggenhed.

Lad AB og AC være to rette Linier, der skjære hinanden i Punktet A. Forestille vi os en Plan lagt gjennem Linien AB, og denne Plan derpaa dreies om AB indtil den gaaer gjennem Punktet C, da har Linien AC to Punkter A og C i denne Plan, og ligger altsaa aldeles deri; altsaa er denne Plans Beliggenhed bestemt alene ved den Betingelse: at indeholde de to rette Linier AB, AC. Fig.189.

Følg. I. En Triangel ABC, eller tre Punkter A, B, C, som ikke ligge i een ret Linie, bestemme en Plans Beliggenhed.

Ved fire eller flere Punkter maae det derimod særskilt bevises, om en Plan lagt gjennem de tre Punkter ogsaa gaaer gjennem hvert af de øvrige.

Fig. 190. II. To Paralleler AB, CD bestemme ogsaa en Plans Beliggenhed; thi naar man drager Secanten EF, da er Planen, lagt gjennem de to rette Linier AE, EF, de to Parallelers Plan.

216— Naar to Planer skjære hinanden, da er det efter en ret Linie.

Overskjæringslinien maae være ret, thi hvis de to Planer havde tre fælleds Punkter som ikke laae i een ret Linie, da udgjorde de kun een Plan (№ 215, I).

Fig. 191. **217— Naar en ret Linie AP, der træffer Planen MN i Punktet P, er perpendiculær paa to Linier PB, PC, dragne i denne Plan gjennem Sammenstødningspunktet P, saa er den perpendiculær paa enhver ret Linie dragen i samme Plan gjennem Punktet P.**

Lad PQ være denne rette Linie. Drag fra et vilkaarligt Punkt Q i samme, en ret Linie BC saaledes i Vinklen BPC, at BQ = QC (№ 116); drag AB, AQ og AC.

Da Punktet Q er Midten af Basis BC, saa giver Trianglen BPC (№ 129)

$$\overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = 2\,\overline{PQ}^2 + 2\,\overline{QC}^2.$$

Af samme Grund giver Trianglen BAC

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\,\overline{AQ}^2 + 2\,\overline{QC}^2.$$

Subtraheer den første Ligning fra den anden, og bemærk: at Trianglerne APC, APB, begge retvinklede i P, give $\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{AP}^2$ og $\overline{AB}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{AP}^2$, saa har man

$$\overline{AP}^2 + \overline{AP}^2 = 2\,\overline{AQ}^2 - 2\,\overline{PQ}^2$$

følgelig $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{PQ}^2$ eller $\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2$, altsaa er Trianglen APQ retvinklet i P (№ 128, Anm.), og AP ⊥ PQ.

Anm: Linien AP, perpendiculær paa enhver ret Linie dragen i Planen MN gjennem Sammenstødningspunktet, er perpen-

diculær paa denne Plan; og omvendt: Planen MN er perpendiculær paa Linien AP.

218— **Naar fra eet Punkt P i en ret Linie AP udgaae tre Perpendiculærer PB, PC, PQ, da ligge disse i een Plan, perpendiculær paa Linien AP.** Fig.192.

Dersom de tre Perpendiculærer PB, PC, PQ ikke laae i een Plan, da vilde Planen MN, lagt gjennem de to PB, PC, fordi den er perpendiculær paa Linien AP (№ 217), skjære Planen APQ, lagt gjennem AP og PQ, efter en ret Linie PQ′ ⊥ AP, og altsaa vare der fra eet Punkt i Linien AP, og i samme Plan, opreiste to Perpendiculærer PQ, PQ′, hvilket er umuligt (№ 35).

219— **Gjennem eet Punkt i eller udenfor en Plan kan man kun drage een ret Linie perpendiculær paa denne Plan; ligedan kan man gjennem eet Punkt i en ret Linie kun lægge een Plan perpendiculær paa denne Linie.**

Thi 1° Dersom man fra Punktet P i Planen MN kunde opreise to Perpendiculærer PA, PA′ paa denne Plan, og man gjennem disse lagde en Plan, da vare de begge perpendiculære paa de to Planers Overskjæringslinie PB, hvilket er umuligt. Fig.192.

2° Dersom man fra Punktet A kunde nedfælde to Perpendiculærer AP, AQ paa Planen MN, saa havde Trianglen APQ, to rette Vinkler, hvilket er umuligt (№ 45, III). Fig.191.

3° Dersom man gjennem Punktet P i Linien AP kunde lægge en anden Plan end MN perpendiculær paa denne Linie, og man gjennem dette Punkt drog, i den anden Plan, en ret Linie PQ′, da vilde Planen APQ′ lagt gjennem AP og PQ′, skjære Planen MN efter en ret Linie PQ, forskjellig fra PQ′, hvoraf fulgte, at to rette Linier PQ, PQ′ i samme Plan som AP vare perpendiculære, i samme Punkt, paa denne Linie, hvilket er umuligt. Fig.192.

229. Af rette Linier som kunne drages fra et
Fig. 198. Punkt A til en Plan MN er 1º Perpendiculæren AP den korteste; 2º de skraa Linier, der vige ligemeget ud fra Perpendiculæren, ere ligestore; 3º af to skraa Linier er den længst, der viger meest ud fra Perpendiculæren.

1º Perpendiculæren AP er kortere end en hvilkensomhelst skraa Linie AB; thi i den retvinklede Triangel APB er Cathetén AP mindre end Hypotenusen AB.

2º Naar Trianglerne APB, APC, APD, der have ∠ APB = APC = APD, som rette, og Siden AP tilfælleds, tillige have Siden PB = PC = PD, da ere de congruente (Nº 21), altsaa: Hypotenuserne, eller de skraa Linier AB, AC, AD, der vige ligemeget ud fra Perpendiculæren, ere ligestore.

3º Naar PE > PD eller PB, da er, i Planen APE, den skraa Linie AE > AB eller AD (Nº 36).

Følg. I. Perpendiculæren AP er Maalet for Punktet A's Afstand fra Planen MN.

II. Beskrives i Planen MN, fra Punktet P som Centrum, en Cirkellinie BCD, da ere de skraa Linier AB, AC, AD, dragne fra et Punkt A i Perpendiculæren AP til Punkter i denne Cirkellinie, ligestore; altsaa finder man det Punkt, hvor en Perpendiculær, nedfældet fra Punktet A paa Planen MN, vilde træffe denne, ved at tage tre Punkter B, C, D i denne Plan, hvilke ligge ligelangt fra Punktet A, og søge Centret til Cirkellinien ført gjennem de tre Punkter B, C, D: dette Centrum P er det søgte Punkt.

Anm. Punktet P, hvor Perpendiculæren nedfældet fra et Punkt A paa en Plan MN træffer denne, er Punktet A's Projection paa denne Plan. Linien PB, der forener Projectionerne P, B af en ret Linie AB's Endepunkter paa en Plan MN, er den rette Linie AB's Projection paa denne Plan. Vinklen ABP, hvilken en ret Linie AB danner med sin Projection PB paa en Plan, er denne rette Linies Inclination mod Planen.

Alle de skraa Linier AB, AC, AD, ꝛc., der vige lige meget ud fra Perpendiculæren, have samme Inclination: ∠ABP = ACP = ADP, fordi △ABP ≅ ACP ≅ ADP.

221— Naar Linien AP er perpendiculær paa Planen MN, og fra Punktet P fældes en Perpendiculær PD paa en Linie BC i denne Plan, da er Linien AD perpendiculær paa BC. Fig.194.

Tag DB = DC og drag PB, PC, AB, AC. Da DB = DC, saa er PB = PC (№ 36), altsaa AB = AC (№ 220, 2°), og Linien AD har to Punkter A og D hvert især ligelangt fra begge Endepunkter B, C af Linien BC, altsaa AD ⊥ BC (№ 37, Følg.)

Følg. Linien BC er perpendiculær paa Planen ADP, fordi BC ⊥ AD og PD (№ 217), altsaa veed man: at lægge, gjennem et givet Punkt A, en Plan perpendiculær paa en ret Linie BC.

222— Naar to rette Linier AP, ED ere parallele, og den ene AP er perpendiculær paa en Plan MN, da er ogsaa den anden ED perpendiculær paa denne Plan. Fig.195.

Læg gjennem Parallelerne AP, ED en Plan, og lad denne skjære Planen MN efter Linien PD; drag, i Planen MN gjennem Punktet D, Linien BC ⊥ PD, og drag AD.

Da BC ⊥ Pl. APDE (№ 217, Anm.), saa er ∠BDE = R; nu er og ∠EDP = R, fordi AP ⊥ PD, og ED ≠ AP (№ 54, I), altsaa er Linien ED perpendiculær paa to Linier PD, BD i Planen MN, følgelig ED ⊥ Pl. MN (№ 217).

Følg. I. Omvendt: naar to rette Linier AP, ED ere perpendiculære paa samme Plan MN, da ere de parallele; thi hvis ikke ED, men en anden Linie, dragen fra D, var parallel med AP og altsaa perpendiculær paa Planen MN, da vare der, fra samme Punkt D, opreiste to Perpendiculærer paa Planen MN, hvilket er umuligt (№ 219).

II. To Linier A og B, parallele med en tredie C, ere indbyrdes parallele; thi forestille vi os en Plan perpendiculair paa Linien C, da ere Linierne A og B, fordi de ere parallele med C, perpendiculære paa samme Plan og altsaa parallele.

Det antages at de tre Linier ikke ligge i een Plan, thi med Hensyn paa dette Tilfælde er Sætningen allerede bekjendt (№ 59).

Fig. 196. **223— Naar en ret Linie AB er parallel med en Linie CD i Planen MN, da kan den ikke træffe sammen med denne Plan.**

Dersom Linien AB, der ligger i Planen ABCD, kunde træffe sammen med Planen MN, da var det kun i eet eller andet Punkt af de to Planers Overskjæringslinie CD, men CD er parallel med AB, altsaa kan AB ikke træffe sammen med Planen MN.

Anm. Linien AB, der ikke kan træffe sammen med Planen MN er parallel med denne Plan; og omvendt Planen MN er parallel med Linien AB.

Følg. I. Linien AB er parallel med enhver ret Linie dragen, i Planen MN, parallel med Linien CD, fordi de begge ere parallele med CD (№ 222, II). Linien AB er ogsaa parallel med enhver Plan lagt gjennem Linien CD.

II. Naar to rette Linier AB, CE hverken ere parallele eller skjære hinanden, da kunde stedse gjennem den ene lægges en Plan parallel med den anden. Drag gjennem et Punkt C i den ene Linie CE en Parallel CD med AB, saa er Planen MN, bestemt ved de to Linier CD, CE, parallel med AB, og kun denne Plan fyldestgjør Opgaven.

Fig. 197. **224— To Planer MN, PQ, perpendiculære paa samme rette Linie AB, kunne ikke træffe sammen.**

Thi antag at de kunne træffe sammen, at O er eet af deres fælleds Punkter; drag OA og OB, saa er Linien AB, der er perpendiculær paa Planen MN, perpendiculær paa Linien OA,

draget i denne Plan fra Sammenstødningspunktet A; af samme Grund AB ⊥ BO; altsaa vare to Perpendiculærer OA, OB nedfældte fra eet Punkt paa een ret Linie, hvilket er umuligt; altsaa kunne de to Planer MN, PQ ikke træffe sammen.

Anm. To Planer ere parallele, naar de ikke kunne træffe sammen.

225— Naar to parallele Planer MN, PQ skjæres af en tredie Plan FG, da ere Overskjæringslinierne EF, GH parallele. Fig. 196.

Dersom Linierne EF og GH, hvilke ligge i een Plan, ikke ere parallele, da træffe de, tilstrækkeligen forlængede, sammen, hvilket da ogsaa er Tilfældet med Planerne MN, PQ hvori de ligge, og disse Planer ere da ikke parallele.

226— Naar en Linie AB er perpendiculær paa den ene af to parallele Planer MN, PQ, da er den og perpendiculær paa den anden. Fig. 197.

Antag Linien AB ⊥ Pl. MN. Drag i Planen PQ, fra B, en ret Linie BC, og læg gjennem AB og BC Planen ABC, der skjærer Planen MN efter en Linie AD ≠ BC (№ 225), saa er AB ⊥ AD, fordi AB ⊥ Pl. MN, altsaa AB ⊥ BC; ligedan AB perpendiculær paa enhver anden Linie dragen i Planen PQ gjennem Punktet B, altsaa Linien AB ⊥ Pl. PQ.

227— Paralleler EG, FH mellem to parallele Planer MN, PQ ere ligestore. Fig. 198.

Lægges gjennem Parallelerne EG, FH en Plan EGHF, der skjærer de parallele Planer efter Linierne EF, GH, saa er EF ≠ GH (№ 225) og Figuren EGHF et Parallelogram, altsaa EG = FH (№ 152).

Følg. Vi kunne antage EG og FH perpendiculære paa Planerne MN, PQ, altsaa: **to parallele Planer have overalt samme Afstand.**

228— Naar ved to Vinkler CAE, DBF, i forskjellige Planer, den Enes Been ere parallele med den An- Fig. 199.

dens Been, og Aabningerne vende til samme Side, da ere disse Vinkler ligestore og Planerne hvori de ligge parallele.

Tag AC = BD, AE = BF, og drag CE, DF, AB, CD, EF. Da AC = og ≠ BD, saa er Figuren ABDC et Parallelogram (Nº 152), altsaa CD = og ≠ AB; af en lignende Grund EF = og ≠ AB, altsaa CD = og ≠ EF og Figuren CEFD et Parallelogram, følgelig Siden CE = DF, og Trianglerne CAE, DBF, som eensſidede, congruente, altsaa ∠ CAE = DBF.

Disse Vinkler ligge i parallele Planer; thi lad os antage at Planen, lagt gjennem Punktet A parallel med Planen DBF, ikke skjar Linierne CD og EF i Punkterne C og E, men i G og H, saa vare de tre Linier AB, GD, HF ligestore, fordi de ere parallele (Nº 227), men AB = CD = EF, altsaa CD = GD og EF = HF, hvilket er umuligt; altsaa er Pl. CAE ≠ Pl. DBE.

Følg. Naar to parallele Planer MN og PQ skjæres af to Planer CABD og EABF, da danne Overskjæringslinierne CA og AE, DB og BF, ligestore Vinkler CAE, DBF; thi CA ≠ DB og AE ≠ BF (Nº 225), altsaa ∠ CAE = DBF.

Fig. 199. **229—** Naar tre rette Linier AB, CD, EF, der ikke ligge i een Plan, ere ligestore og parallele, da ere Trianglerne ACE, BDF, dannede ved at forene disse Liniers tilsvarende Endepunkter, congruente og deres Planer parallele.

Thi da AB = og ≠ CD, saa er Figuren ABDC et Parallelogram, altsaa Siden AC = og ≠ BD; af en lignende Grund Siden AE = og ≠ BF, Siden CE = og ≠ DF, altsaa △ ACE ≅ BDF (Nº 26), og man beviser, som ved foregaaende Sætning, Pl. ACE ≠ Pl. BDF.

230— To rette Linier AB, CD, der staae mellem to parallele Planer MN, RS, skjæres af en tredie PQ i proportionale Dele. Fig.200.

Lad den tredie Plan PQ, parallel med de to første, skjære Linierne AB og CD i Punkterne E og F, saa skal AE : EB = CF : FD.

Drag Linien AD, der skjærer Planen PQ i G, og drag AC, EG, GF, BD. De to parallele Planer PQ, RS, skjaarne af Planen BAD, give parallele Overskjæringslinier EG, BD, altsaa har man

$$AE : EB = AG : GD$$

og, fordi Overskjæringslinierne AC og GF ere parallele,

$$AG : GD = CF : FD.$$

Disse to Proportioner have et fælleds Forhold AG : GD, altsaa

$$AE : EB = CF : FD.$$

Toplansvinkler.

231— To efter en Linie AM sammenstødende Planer BAMN, CAMP danne en Toplansvinkel; de to Planer ere Siderne og Linien AM Kanten. Fig.201.

En Toplansvinkel benævnes ved fire Bogstaver: de to midterste angive Kanten. Saaledes benævnes Toplansvinklen dannet af Planerne BAMN, CAMP ved BAMC.

232— To Toplansvinkler BAMC, *bamc* forholde sig som de plane Vinkler BAC, *bac*, fremkomne ved deres Siders Overskjæring af Planerne BAC, *bac* perpendiculære paa deres Kanter AM, *am*. Fig.201 og 202.

1º Det perpendiculære Snit gjennem ethvert Punkt af Kanten AM giver samme plane Vinkel; thi naar Planerne BAC, NMP ere perpendiculære paa samme Linie AM, da ere de parallele (Nº 224), altsaa ∠NMP = BAC (Nº 228, Folg.)

Fig. 201. 2° Naar de plane Vinkler BAC, *bac* ere ligestore, da ere ogsaa Toplansvinklerne BAMC, *bamc* ligestore; thi bringes $\angle$ *bac* paa BAC, da falder Kanten *am* paa AM, fordi der i modsat Fald vare to Perpendiculærer opreiste fra eet Punkt i en Plan; altsaa falder Planen *an* paa AN, Planen *ap* paa AP, og Toplansvinklerne BAMC, *bamc* dække hinanden.

Fig. 202. 3° Naar de plane Vinkler BAC, *bac* have et Fællesmaal *bax*, saa før dette paa BAC og *bac*, og læg Planer gjennem Kanterne AM, *am* og hver Delingslinie AX, AY, ꝛc. *ax*, *ay*, ꝛc. De, ved disse Planer MAX, MAY, ꝛc. *max*, *may*, ꝛc. fremkomne, partielle Toplansvinkler BAMX, XAMY, ꝛc. *bamx*, *xamy*, ꝛc. ere ligestore, fordi de plane Vinkler BAX, XAY, ꝛc., *bax*, *xay*, ꝛc. ere ligestore, og Toplansvinklen *bamx* er indeholdt lige saamange Gange i BAMC og *bamc*, som den plane Vinkel *bax* i BAC og *bac*; hvoraf følger, at Toplansvinklerne BAMC, *bamc* forholde sig som de plane Vinkler BAC, *bac*.

4° Naar Forholdet af de plane Vinkler BAC, *bac* er incommensurabelt, da beviser man let (ved et fuldkommen lignende Raisonnement som ved Sætningen i N°. 92), at og isaafald denne Proportion finder Sted.

Altsaa, i ethvert Tilfælde, forholde to Toplansvinkler sig som de plane Vinkler, fremkomne ved deres Siders Overskjæring af Planer perpendiculære paa deres Kanter.

Følg. Vi kunne derfor tage den plane Vinkel BAC som Maal for Toplansvinklen BAMC. Benene af Vinklen BAC ere perpendiculære paa Kanten AM, fordi Pl. BAC $\perp$ AM (N°. 217), altsaa: **Maalet for en Toplansvinkel er en plan Vinkel, dannet af to fra samme Punkt i Kanten opreiste Perpendiculærer, een i hver Plan.** Naar *bac* er Eenheden for plane Vinkler, da er *bamc* Eenheden for Toplansvinkler; og ere Buerne BC, *bc* beskrevne med samme Radius, AB = *ab*, saa kan ogsaa Buen BC tjene som Maal for Toplansvinklen BAMC (N°. 92, Anm.) Naar den plane Vinkel *bac* er ret, da er To-

planvinklen være ret, og Planerne ere, ere perpendiculære paa hinanden.

Anm. Ved Toplansvinkler har man samme Sætninger som ved plane Vinkler. Saaledes ved to hinanden overskjærende Planer ere Topvinklerne ligestore, og Summen af to Jevnsidevinkler lig to rette Vinkler; altsaa naar en Plan er perpendiculær paa en anden, saa er denne perpendiculær paa den første. Ligedan: ved to parallele Planer, skjaarne af en tredie Plan, finde samme Ligheder og Egenskaber Sted, som ved to parallele Linier, skjaarne af en tredie Linie.

233. Naar en Linie AP er perpendiculær paa en Plan MN, da er enhver Plan APB lagt gjennem AP perpendiculær paa Planen MN. Fig. 202.

Lad BC være de to Planers Overskjæringslinie; drag, i Planen MN, Linien DE ⊥ BP, saa er AP ⊥ BC og DE, ∠APD = R, men ∠APD er Maalet for Vinklen dannet af Planerne AB, MN, altsaa Pl. AB ⊥ Pl. MN.

Anm. Naar tre i eet Punkt sammenstødende Linier AP, BP, DP ere perpendiculære paa hinanden, da er hver især perpendiculær paa Planen bestemt ved de to øvrige, og de tre Planer perpendiculære paa hinanden.

234. Naar to Planer AB, MN ere perpendiculære paa hinanden, og i den ene Plan er draget, perpendiculær paa Overskjæringslinien PB, en Linie PA, da er denne Linie perpendiculær paa den anden Plan MN. Fig. 203.

Drages, i Planen MN, Linien PD ⊥ PB, saa er, fordi Planerne ere perpendiculære paa hinanden, ∠APD = R, altsaa AP ⊥ PD; nu er og AP ⊥ PB, følgeligen er Linien AP ⊥ Pl. BPD eller Pl. MN (№ 217).

Følg. Naar Planerne AB, MN ere perpendiculære paa hinanden, og fra et Punkt P i Overskjæringslinien er opreist en Perpendiculær paa Planen MN, da ligger denne Perpendiculær i Planen AB; thi hvis den ikke laae deri, da funde i denne Plan,

fra Punktet P, drages en Linie PA ⊥ PB, og denne Linie PA var ⊥ Pl. MN; men da vare der fra samme Punkt P to Perpendiculærer opreiste paa Planen MN, hvilket er umuligt (Nº 219).

Fig.203. **235— Naar to Planer AB, AD ere perpendiculære paa en tredie MN, da er deres Overskjæringslinie AP perpendiculær paa den tredie Plan.**

Thi en Perpendiculær opreist, fra Punktet P, paa Planen MN bør ligge saavel i Planen AB som i Planen AD (Nº 234, Følg.), og den er altsaa deres Overskjæringslinie AP.

Fig.204. **236— Den korteste Afstand mellem to Linier AB, MN, der hverken skjære hinanden eller ere parallele, er en ret Linie perpendiculær paa dem begge.**

Thi drages gjennem et Punkt A i Linien AB en Linie AC ≠ MN, og gjennem et Punkt M i MN Linien MP ≠ AB, saa er Pl. BAC ≠ Pl. PMN (Nº 228), og de to Linier AB, MN ligge intetsteds nærmere sammen end disse Planer. Læg gjennem Linien AB Planen ABGF ⊥ Pl. PMN, og lad deres Overskjæringslinie være GF, der skjærer Linien MN i Punktet F. Opreis fra F, paa Planen PMN, Perpendiculæren FA, saa er denne ogsaa perpendiculær paa Planen BAC (Nº 226) og perpendiculær paa Linierne AB, MN; altsaa udmaaler Linien AF den korteste Afstand saavel mellem Planerne BAC, PMN, som Linierne AB, MN.

Fleerplansvinkler.

237— Naar flere Planer skjære hinanden to og to, og alle Overskjæringslinierne støde sammen i eet Punkt, da danne disse Planer en **Fleerplansvinkel** eller **Legemsvinkel.**

Fig.205. Planerne ASB, BSC, CSA, der danne en Fleerplansvinkel S, kaldes dennes **Sider**, Planernes Overskjæringslinier SA, SB, SC **Kanterne**, og disse Liniers Sammenstødningspunkt S **Spidsen.**

En Fleerplansvinkel kan ikke fremstaae ved færre end tre Planer. Efter Planernes Antal kaldes den en **Treplansvinkel**, **Fiirplansvinkel**, ɩc.

En Fleerplansvinkel S skjælnes fra andre af samme Antal Sider ved de plane Vinkler ASB, BSC, CSA, dannede af Kanterne, og Toplansvinklerne ASBC, BSCA, CSAB, dannede af sammenstødende Sider. Ved en Treplansvinkel ere der altsaa sex Stykker at betragte: tre plane Vinkler og tre Toplansvinkler.

238— Ved enhver Treplansvinkel er Summen af hvilkesomhelst to af de plane Vinkler større end den tredie.

Det er tilstrækkeligt at bevise Sætningen i det ene Tilfælde: at den plane Vinkel, som sammenlignes med Summen af de to øvrige, er større end hver af disse, for at kunne slutte til dens Rigtighed i ethvert andet Tilfælde.

Antag, ved Treplansvinklen S, at ASB er den største af de Fig. 205.
plane Vinkler: vi bevise da, at ∠ ASB < ASC + BSC.

Tag, i Planen ASB, ∠ BSD = BSC; drag i denne Plan en ret Linie ADB, tag SC = SD, og drag AC, BC.

Trianglerne BSD og BSC have Siden SB tilfælleds, Siden SD = SC og ∠ BSD = BSC, altsaa (Nº 21, Følg.) BD = BC, men AB < AC + BC, altsaa AB − BD eller AD < AC. I Trianglerne ASD, ASC, der have Siden SA tilfælleds, Siden SD = SC, er altsaa den tredie Side AD < AC, følgelig er ∠ ASD < ASC (Nº 25), og adderes hertil ∠ BSD = BSC, saa har man ∠ ASD + BSD eller ∠ ASB < ASC + BSC.

239— Ved enhver Fleerplansvinkel er Summen af alle de plane Vinkler mindre end 4 R.

Lad alle Siderne af en Fleerplansvinkel S være skjaarne af Fig. 206.
en Plan ABCDE; drag, fra et Punkt O i Polygonen ABCDE til alle Vinkelspidserne, Linierne OA, OB, OC, ɩc.

Summen af Vinklerne i Triangierne ASB, BSC ꝛc. om Spidsen S er liig Summen af Vinklerne i samme Antal Triangler AOB, BOC, ꝛc. om Punktet O. Men ved Treplansvinklen B er ∠ ABS + SBC > ABC eller ABO + OBC (Nº 238), li: gedan ved C er ∠ BCS + SCD > BCD eller BCO + OCD og saaledes ved de øvrige Treplansvinkler D, E ꝛc. Deraf følger at i Triangierne om Spidsen S er Summen af Vinklerne ved Basis større end Summen af Vinklerne ved Basis i Triangierne om Punktet O, og at derfor Summen af Vinklerne om Spidsen S er mindre end Summen af Vinklerne om Punktet O, men den sidste Sum er = 4 R (Nº 18, III), altsaa er ved Fleerplans: vinklen S Summen af alle de plane Vinkler mindre end 4 R.

Anm. Dette Beviis forudsætter at Fleerplansvinklen er convex, eller at hvilkensomhelst Sides Plan, naar den forlænges, ikke skjærer Fleerplansvinklen; thi uden denne Indskrænkning havde Summen af de plane Vinkler ingen Grændser, og kunde være af hvilkensomhelst Storhed.

240. Naar ved to Treplansvinkler de tre plane Vinkler ere stykkeviis ligestore, da danne de ligestore Vinklers Planer ligestore Toplansvinkler.

Fig. 207. Antag ∠ ASC = A′S′C′, ∠ ASB = A′S′B′ og ∠ BSC = B′S′C′, da skal f. Ex. Toplansvinklen CSAB, dannet af Planerne ASC, ASB, være liig Toplansvinklen C′S′A′B′, dan: net af Planerne A′S′C′, A′S′B′.

Fæld fra et Punkt B i Kanten SB en Perpendiculær BO ned paa Planen ASC, og drag, fra Sammenstødningspunktet O, Linien OA ⊥ SA, og OC ⊥ SC; drag AB, BC. Tag S′B′ = SB; fæld B′O′ ⊥ Pl. A′S′C′, drag O′A′ ⊥ S′A′, og O′C′ ⊥ S′C′, endvidere A′B′, B′C′.

Triangierne SAB og S′A′B′ ere retvinklede i A og A′ (Nº 221), og have ∠ ASB = A′S′B′, altsaa ∠ SBA = S′B′A′; endvidere er SB = S′B′, altsaa △ SAB ≅ S′A′B′ (Nº 35, Følg.), følgeligen SA = S′A′ og AB = A′B′. Man

beviser paa samme Maade SC = S′C′ og BC = B′C′. Fiirkanterne SAOC og S′A′O′C′ ere congruente; thi bringes de med de ligestore Vinkler ASC, A′S′C′ paa hinanden, da falder, fordi SA = S′A′ og SC = S′C′, Punktet A i A′ og Punktet C i C′; endvidere, forbi AO ⊥ SA og A′O′ ⊥ S′A′, falder AO paa A′O′, ligedan CO paa C′O′, og følgeligen Punktet O i O′; altsaa dække de to Fiirkanter hinanden, og man har AO = A′O′. Nu have de i O og O′ retvinklede Triangler AOB, A′O′B′ Hypotenusen AB = A′B′ og Catheten AO = A′O′, altsaa △ AOB ≅ A′O′B′ (№ 43), følgeligen ∠ OAB = O′A′B′. Men ∠ OAB er Maalet for Toplansvinklen CSAB, og ∠ O′A′B′ Maalet for Toplansvinklen C′S′A′B′, altsaa CSAB = C′S′A′B′.

Det bemærkes; at Vinklen A i den retvinklede Triangel OAB er egentligen kun Maalet for Vinklen CSAB, naar Perpendiculæren BO falder, med Hensyn til SA, til samme Side som SC; falder den derimod til den anden Side, da er Vinklen CSAB stump og Supplement til dens Jevnsidesvinkel, hvis Maal er ∠ A i △ OAB; men i samme Tilfælde er ogsaa Vinklen C′S′A′B′ stump og Supplement til dens Jevnsidesvinkel, hvis Maal er ∠ A′ i △ O′A′B′, altsaa, forbi man stedse har ∠ A = A′, slutter man: Toplansvinklen CSAB = C′S′A′B′.

Anm. Naar ved to Treplansvinkler de tre plane Vinkler ere stykkeviis ligestore, og de ligestore Vinkler tillige ere eensbeliggende d. e. at de tre Vinkler ved den Ene ere ordnede paa samme Maade som de tilsvarende, med dem ligestore, Vinkler ved den Anden, da kunne disse Treplansvinkler bringes til Dækning. Det er nemlig allerede beviist at Fiirkanterne SAOC og S′A′O′C′ ere congruente; lad dem være bragt paa hinanden med Siden SA paa S′A′, saa falder SC paa S′C′, og Punktet O i O′. Men af △ AOB ≅ A′O′B′ følger, at Perpendiculæren OB, paa Planen ASC, er liig Perpendiculæren O′B′, paa Planen A′S′C′, og disse Perpendiculærer staae til samme

Side af Planerne, altsaa falder Punktet B i B', Kanten SB paa S'B', og de to Treplansvinkler dække hinanden.

Denne Dækning finder imidlertid kun Sted naar de ligestore plane Vinkler ere eensbeliggende, eller ordnede paa samme Maade, i begge Treplansvinklerne; ere derimod de tre plane Vinkler ved den Ene anbragte i omvendt Orden af de tilsvarende, med dem ligestore, Vinkler ved den Anden, eller, hvilket er det Samme, at Perpendiculærerne OB, O'B' staae til modsatte Sider af Planerne ASC, A'S'C', da er det umuligt at kunne bringe de to Treplansvinkler til Dækning. Dog er i dette Tilfælde Sætningen ikke mindre sand, at nemlig de ligestore Vinklers Planer danne ligestore Toplansvinkler; saa at der altsaa ved to Treplansvinkler kan finde Ligestorhed Sted mellem deres sex Stykker, uden at Dækning derfor er mulig.

For at skjælne denne Slags Lighed fra absolut Lighed eller Congruents, sige vi, at to Treplansvinkler ere *symetriske*, naar ved dem de tre plane Vinkler ere stykkeviis ligestore, men anbragte i omvendt Orden.

Denne Bemærkning er og gjeldende for Fleerplansvinkler dannede af flere end tre plane Vinkler; saaledes naar en Fleerplansvinkel er dannet af de plane Vinkler A, B, C, D, E, og en anden Fleerplansvinkel er dannet af samme plane Vinkler, men i omvendt Orden A, E, D, C, B, da kunne de være saaledes, at de ligestore Vinklers Planer danne ligestore Toplansvinkler. Disse to Fleerplansvinkler, der ere liig i alle deres enkelte Stykker, kunne umuligen dække hinanden; de ere kun *symetriske Fleerplansvinkler*.

241— Opg. *Ved en Treplansvinkel, hvis tre plane Vinkler ere givne, at finde een af Toplansvinklerne, ved Construction i een Plan.*

Fig. 208. Lad S være Treplansvinklen, i hvilken man kjender de tre plane Vinkler ASB, ASC, BSC, og skulle finde en Toplansvinkel f. Ex. BSAC, dannet af de to Sider ASB, ASC.

Forestille vi os samme Construction, som ved foregaaende Theorem at være udført, da er den plane Vinkel OAB Maalet for den forlangte Toplansvinkel BSAC. Altsaa gaaer det her ud paa, at finde Vinklen OAB ved en plan Construction.

Afsæt derfor i een Plan $\angle B'S'A' = BSA$, $\angle A'S'C' = ASC$ og $\angle C'S'B'' = CSB$, tag $S'B' = S'B'' = SB$; nedfæld fra Punkterne B' og B'' paa $S'A'$ og $S'C'$ Perpendiculærerne $B'O'$ og $B''O'$, der skjære hinanden i Punktet O'. Beskriv fra A', med Radius $A'B'$, en Halvcirkel $B'B'''D'$, opreis paa $B'D'$, i O', Perpendiculæren $O'B'''$, der træffer Peripherien i B''', og drag $A'B'''$, saa er $\angle D'A'B''' = OAB$.

Thi de to Triangler $B'S'A'$, BSA, retvinklede i A' og A, have $\angle A'S'B' = ASB$, altsaa og $\angle A'B'S' = ABS$, endvidere Hypotenusen $S'B' = SB$, altsaa $\triangle B'S'A' \cong BSA$, og følgelig $S'A' = SA$ og $A'B'$ eller $A'B''' = AB$. Man beviser paa samme Maade $S'C' = SC$, og, da heraf følger at Fiirkanterne $S'A'O'C'$ og $SAOC$ ere congruente, saa er $A'O' = AO$; altsaa ere Trianglerne $A'O'B'''$, AOB, der have Hypotenus og een Cathete stykkeviis ligestore, congruente, følgeligen $\angle D'A'B''' = OAB$.

Naar Punktet O' falder mellem A' og B', da er Vinklen $D'A'B'''$ stump, men er dog stedse Maalet for Toplansvinklen $BSAC$: den er betegnet ved $D'A'B'''$ og ikke ved $O'A'B'''$, for at samme Opløsning kunne være gjeldende i alle Tilfælde.

Anm. Der kunde spørges, om det stedse er muligt: af tre givne plane Vinkler at danne en Treplansvinkel.

For det Første maae Summen af de tre givne Vinkler være mindre end 4 R (№ 239); dernæst bør, naar man har afsat, i een Plan, de to Vinkler $B'S'A'$, $A'S'C'$, den tredie $C'S'B''$ være saaledes, at Perpendiculæren $B''O'$, nedfældet paa $S'C'$, træffer Diameteren $B'D'$ mellem Endepunkterne B', D'; altsaa ere Grændserne for den tredie Vinkel bestemt derved, at Perpendiculæren træffer Punktet B' eller D'. Fæld derfor fra disse Punkter

ned paa $C'S'$ Perpendicularerne $B'M'$ og $D'N'$, der træffe Cirkellinien $B'M'D'$, beskreven med Radius $S'B''$, i Punkterne M' og N', saa ere Vinklerne $C'S'M'$ og $C'S'N'$ Grændserne for den tredie Vinkel.

Da $C'S'$ forlængret er perpendiculær paa Basis $B'M'$ af den ligebenede Triangel $B'S'M'$, saa er $\angle C'S'M' = C'S'B' = A'S'C' + B'S'A'$; og, da $S'C' \perp D'N'$ i den ligebenede Triangel $D'S'N'$, saa er $\angle C'S'N' = C'S'D'$, altsaa $\angle C'S'N' = A'S'C' - A'S'D'$, men $\angle A'S'D' = B'S'A'$, fordi $\triangle A'S'D' \cong A'S'B'$, altsaa $\angle C'S'N' = A'S'C' - B'S'A'$.

Deraf følger: at Opgaven er mulig i alle de Tilfælde, hvor den tredie Vinkel $C'S'B''$ er mindre end Summen og større end Differensen af de to andre Vinkler $A'S'C'$, $B'S'A'$; hvilket stemmer overeens med Theoremet i № 238, thi ifølge dette bør $C'S'B'' < A'S'C' + B'S'A'$, og $A'S'C' < C'S'B'' + B'S'A'$ eller $C'S'B'' > A'S'C' - B'S'A'$.

242. Opg. Ved en Treplansvinkel at finde een af de plane Vinkler, naar de to øvrige og den af deres Planer dannede Toplansvinkel ere givne.

Fig. 208. Lad $B'S'A'$, $A'S'C'$ være de to givne plane Vinkler. Dersom $C'S'B''$ var den forlangte tredie Vinkel, og man udførte samme Construction som ved foregaaende Opgave, da var $\angle D'A'B'''$ Maalet for den givne Toplansvinkel, dannet af de to første givne Vinklers Planer; men ligesom man kan bestemme $\angle D'A'B'''$ ved Hjelp af $\angle C'S'B''$, naar de to øvrige plane Vinkler ere givne, saaledes kan man og bestemme $\angle C'S'B''$ ved Hjelp af $\angle D'A'B'''$. Lad da $\angle D'A'B'''$ være Maalet for den givne Toplansvinkel.

Tag $S'B'$ af en vilkaarlig Længde, drag $B'D' \perp S'A'$, afsæt i A', $\angle D'A'B'''$, som er bekjendt; beskriv fra A', med Radius $A'B'$, Cirkellinien $B'B'''D'$, der skjærer $A'B'''$ i Punktet B'''; drag, fra B''', $B'''O' \perp B'D'$, fra O', $O'B'' \perp S'C'$, og tag B'' saaledes, at $S'B'' = S'B'$, saa er $\angle C'S'B''$ den forlangte tredie plane Vinkel.

Thi naar man danner en Treplansvinkel S, hvor de tre plane Vinkler BSA, ASC, CSB ere stykkeviis liig B′S′A′, A′S′C′, C′S′B″, da har Toplansvinklen BSAC, dannet af Planerne BSA, ASC, samme Maal ∠ OAB = D′A′B‴ som den givne.

Anm. Ved en Fiirplansvinkel S er det ikke tilstrækkeligt at kjende de fire plane Vinkler ASB, BSC, CSD, DSA, for at kunne bestemme de fire Toplansvinkler ASBC, BSCD ꝛc.; thi med samme fire plane Vinkler kan man danne uendelig mange Fiirplansvinkler. Men naar man føier een Betingelse til, f. Ex. naar man giver een Toplansvinkel ASBC, da er Fleerplansvinklen bestemt, og man kan finde hver af de øvrige Toplansvinkler. Forestille vi os nemlig en Treplansvinkel dannet af de tre plane Vinkler ASB, BSC, ASC, da ere de to første givne, saavelsom den af deres Planer dannede Toplansvinkel ASBC; altsaa kan man, ved Hjelp af det nylig opløste Problem, bestemme den tredie plane Vinkel ASC. Betragte vi derpaa Treplansvinklen dannet af de tre plane Vinkler ASC, CSD, DSA, da ere disse tre Vinkler bekjendte, og man kan altsaa finde Toplansvinkien CSDA (Nº. 241). Nu er den opgivne Fiirplansvinkel sammensat af de to omtalte Treplansvinkler, og disse partielle Vinkler ere bekjendte og bestemte, altsaa er den hele Vinkel det ogsaa. Fig. 209.

For at finde Toplansvinklen BSCD, søger man, i den ene partielle Vinkel, den af Planerne ASC og BSC dannede Toplansvinkel, og, i den anden, den af Planerne ASC og CSD dannede Toplansvinkel, og tager Summen af de to fundne Vinkler. Paa samme Maade findes den fjerde Toplansvinkel DSAB.

Man finder saaledes og, at for at bestemme en Femplansvinkel maae, foruden de fem plane Vinkler, to Toplansvinkler være givne; ved en Sexplansvinkel tre Toplansvinkler o. s. fr.

II. Polyedre.

Polyedres Congruents og Ligedannelse.

243. Et Polyeder er et Legem begrændset af Planer. Disse Planers Grændslinier ere Polyedrets Kanter, og Kanternes Sammenstødningspunkter dets Spidser: ethvert af disse Punkter er Spidsen af en Fleerplansvinkel. De retlinede plane Figurer dannede af Kanterne ere Polyedrets Sider, og alle Siderne tilsammen dets Overflade. Man kalder Diagonal en ret Linie, der forbinder to af Polyedrets Spidser, naar de ikke ere Endepunkter af samme Kant.

Polyedre i Almindelighed benævnes efter Sidernes Antal: Tetraedret har 4 Sider, Hexaedret 6, Octaedret 8, Dodecaedret 12, Icosaedret 20.

Tetraedret er det simpelste Polyeder; thi der maae i det Mindste tre Planer til at danne en Fleerplansvinkel: skjæres nu disse tre Planer af en fjerde, da er det fremkomne Legem et Tetraeder.

Et Polyeder er regulær, naar alle Siderne ere regulære Polygoner og disse ere congruente, saavelsom alle Fleerplansvinklerne.

Note. Alle Fleerplansvinklerne ved de Polyedre vi betragte ere udgaaende, eller disse Polyedre ere convexe d. v. s. at Overfladen kan kun skjæres i to Punkter af en ret Linie. Naar ved et saadant Polyeder en hvilkensomhelst Sides Plan forlængres, da kan denne ikke skjære Legemet, altsaa ligge alle Dele af Polyedret til samme Side af denne Plan.

Fig. 206. 244. En Pyramide er et Polyeder begrændset af Triangler, der alle have samme Toppunkt S, og af en retlinet plan Figur ABCDE, hvis Sider ere disse Trianglers Grundlinier.

Denne Polygon ABCDE er Pyramidens Grundflade og Trianglernes fælleds Toppunkt S Pyramidens Spids.

En Pyramides Høide er en Perpendiculær nedfældet fra Spidsen paa Grundfladens Plan.

Naar Grundfladen er en regulær Polygon og dens Centrum træffes af Perpendiculæren nedfældet fra Spidsen, da siges Pyramiden at være regulær, og Perpendiculæren kaldes dens Axe.

En Pyramide fremstaaer naar alle Siderne af en Fleerplansvinkel S skjæres af een Plan ABCDE. Efter Antallet af denne Fleerplansvinkels Sider kaldes Legemet en tresidet, firsidet, rc. Pyramide.

Den tresidede Pyramide er altsaa egentligen et Tetraeder; en hver af Fleerplansvinklerne er dannet af tre Planer; hvorimod ved de øvrige Pyramider kun de Fleerplansvinkler ere dannede af tre Planer, hvis Spidser ligge i Grundfladen. Fig. 205.

245— **To tresidede Pyramider ere congruente, naar ved en Treplansvinkel i hver af dem 1º de tre Sider ere stykkeviis congruente og eensbeliggende, eller 2º naar de to Sider ere stykkeviis congruente, eensbeliggende, og danne ligestore Toplansvinkler.**

Naar i de to tresidede Pyramider SABC, S′A′B′C′. Fig. 205.

1º Siden SAB ≅ S′A′B′, SAC ≅ S′A′C′, SBC ≅ S′B′C′ da ere, ved de to Treplansvinkler S, S′, de tre plane Vinkler stykkeviis ligestore og eensbeliggende, altsaa kunne disse to Treplansvinkler bringes til Dækning (Nº 240, Anm.), og, da Siderne ere congruente, saa vil Punktet A falde i A′, B i B′, C i C′, og Trianglerne ABC, A′B′C′ dække hinanden.

2º Naar Siden SAB ≅ S′A′B′, SAC ≅ S′A′C′ og Toplansvinklen BSAC = B′S′A′C′, da er Pyr. SABC ≅ S′A′B′C′. Thi, naar Siderne SAB, S′A′B′ dække hinanden, da er dette og Tilfældet med Siderne SAC, S′A′C′, fordi Toplansvinklen BSAC = B′S′A′C′; altsaa falder Kanten SB paa S′B′, SC paa S′C′, og Siderne SBC, S′B′C′ dække hinanden.

Følg. I. Altsaa ere de eensbeliggende Kanter ligestore; og omvendt naar de eensbeliggende Kanter ere ligestore, da ere de to tresidede Pyramider congruente; thi af Kanternes Ligestorhed følger de eensbeliggende Trianglers Congruents (Nº 26).

II. Et Punkts Beliggenhed i Rummet er bestemt ved dets Afstande fra tre givne Punkter, der ikke ligge i een ret Linie; thi paa en triangulær Grundflade, der har sine Vinkelspidser i de tre givne Punkter, kan, til samme Side af denne Plan, kun een tresidet Pyramide construeres, hvis Spids er bestemt ved de tre i dette Punkt sammenstødende Kanter.

246— Naar to Polyedre have alle Spidser tilfælleds, da dække de hinanden.

Thi lad os antage at det ene Polyeder er allerede construeert, og at man nu vil construere et andet, der skulde have netop samme Spidser, da kunde i dette ikke alle Sidernes Planer gaae gjennem samme Punkter som i det første, thi isaafald vare de kun eet og samme Polyeder. Men det er da indlysende, at nogle af de nye Planer skjære det første Polyeder, og Spidserne maatte deels ligge til den ene, deels til den anden Side af disse Planer, hvilket er umuligt ved et convext Polyeder; altsaa, naar to Polyedre have alle Spidser tilfælleds, da dække de hinanden.

Anm. Naar ved et Polyeder en Triangel dannes mellem tre Spidser i een Side, taget til Grundflade, da kunne de, udenfor denne Plan liggende Spidsers Beliggenhed, med Hensyn til denne Plan, bestemmes ved tresidede Pyramider, der have den givne Triangel til fælleds Grundflade. Naar Polyedret har n Spidser, og dets Grundflade er en Triangel, da ligger udenfor denne $n - 3$ Spidser, bestemte ved $3(n - 3)$ Linier, og Triangelen ved 3; altsaa bliver Polyedret bestemt ved $3(n - 3) + 3 = 3n - 6$ givne Linier. Men naar Polyedrets Grundflade er en anden Polygon, af flere end tre Sider, da modificeres dette Antal bestemmende Linier; thi hver Spids i samme Plan som den

nævnte Triangel bestemmes ved to Linier, isteden for at hver Spids udenfor samme Plan bestemmes ved tre Linier.

Har man givet Beliggenheden af Punkterne A, B, C, K, H, 2c., der skulle tjene som Spidser for et Polyeder, saa kan dette let construeres. Fig.210

Vælg tre Punkter D, E, H saaledes, at Planen DEH, der muligen gaaer gjennem flere givne Punkter K, C, lader alle de øvrige ligge til samme Side, saa er den retlinede plane Figur DEH eller DEHKC een af Polyedrets Sider. Læg derpaa en Plan gjennem een af denne Figurs Grændslinier EH, og drei denne Plan indtil den gaaer gjennem eet eller flere af de tilbageblevne Punkter, F eller F, I, saa har man en anden Side HEF eller HEFI. Vedbliv saaledes at lægge Planer gjennem de fundne Linier eller Kanter, indtil alle de givne Punkter ere optagne; saa er det dannede Legem det forlangte Polyeder, thi der kunne ikke dannes to som have alle Spidser tilfælleds.

247. To Polyedre ere symetriske, naar de ere construerte paa samme Grundflade, til modsatte Sider af denne Plan, saaledes at de tilsvarende Spidser ligge ligelangt fra denne Plan, i een Perpendiculær paa samme.

F. Ex. naar den rette Linie SS′ er ⊥ Pl. ABC og deles ved Punktet O, hvor den træffer denne Plan, i to ligestore Dele, da ere de to Pyramider SABC, S′ABC, med samme Grundflade ABC, to symetriske Polyedre. Fig.211

248. I to symetriske Polyedre ere de tilsvarende Sider congruente, og to sammenstødende Sider i det ene Legem danne samme Toplansvinkel, som de tilsvarende Sider i det andet.

Lad ABCDE være de to Polyedres fælleds Grundflade, lad M og N være to hvilkesomhelst Spidser i det ene Polyeder, M′ og N′ de tilsvarende Spidser i det andet; da ere, ifølge Definitionen, de rette Linier MM′ og NN′ ⊥ Pl. ABC og deles ved Punkterne m og n, hvor de træffe denne Plan, i to ligestore Fig.212.

Dele. Drei Trapeziet $mM'N'n$ om mn, indtil dets Plan falder paa Planen $mMNn$, saa, fordi Vinklerne i m og n ere rette, falder mM' paa mM, og nN' paa nN, men $mM' = mM$, $nN' = nN$, altsaa falder Punktet M' i M og N' i N, altsaa er Afstanden MN = M'N'.

Lad P være en tredie Spids i det første Polyeder, og P' den tilsvarende Spids i det andet, saa har man ligedan MP = M'P', NP = N'P', altsaa: **Trianglen MNP, der forener tre hvilkesomhelst Spidser i det ene Polyeder, er congruent med Trianglen M'N'P', der forener de tre tilsvarende Spidser i det andet Polyeder.**

Betragter man alene de Triangler, som ere dannede paa Polyedrenes Overflader, da kan man allerede heraf slutte, at disse Overflader ere sammensatte af samme Antal, stykkeviis congruente, Triangler.

Dersom nogle af disse Triangler ved det ene Polyeder ligge i een Plan og danne een Side af dette Polyeder, da ligge ogsaa de tilsvarende Triangler ved det andet Polyeder i een Plan og danne den tilsvarende Side, congruent med den første. Thi naar Trianglerne MPN og NPQ ligge i een Plan, og M'P'N', N'P'Q' ere de tilsvarende Triangler, saa har man $\angle$ MNP = M'N'P', $\angle$ PNQ = P'N'Q', og, naar MQ, M'Q' drages, $\triangle$ MNQ $\cong$ M'N'Q', altsaa $\angle$ MNQ = M'N'Q', men da MPNQ er een Plan, saa er $\angle$ MNQ = MNP + PNQ, altsaa har man og $\angle$ M'N'Q' = M'N'P' + P'N'Q', og disse tre Vinkler ligge i een Plan; thi dannede de en Treplansvinkel, da havde man M'N'Q' < M'N'P' + P'N'Q' (№ 238), hvilket ei finder Sted, altsaa ligge Trianglerne M'N'P', P'N'Q' i een Plan. Deraf følger: at til hver Side af det ene Polyeder svarer en med den congruent Side af det andet Polyeder, og disse to Polyedre have altsaa samme Antal, stykkeviis congruente, Sider.

Lad MPN, NPQ være to Triangler dannede i de to efter Kanten NP sammenstødende Sider af det ene Polyeder, og

M′P′N′, N′P′Q′ de tilsvarende Triangler ved det andet Polyeder, saa kan man forestille sig en Treplansvinkel N, dannet af de tre plane Vinkler MNQ, MNP, PNQ, og en anden Treplansvinkel N′, dannet af de tre plane Vinkler M′N′Q′, M′N′P′, P′N′Q′; men det er allerede beviist, at disse plane Vinkler ere stykkeviis ligestore, altsaa er Toplansvinklen, dannet af Planerne MNP, PNQ, ligestor med Toplansvinklen, dannet af Planerne M′N′P′, P′N′Q′.

Altsaa, ved to symetriske Polyedre, ere Siderne stykkeviis congruente, og Toplansvinklen, dannet af to hvilkesomhelst sammenstødende Sider af det ene Polyeder, er ligestor med Toplansvinklen, dannet af de tilsvarende Sider af det andet Polyeder.

Anm. Det bemærkes, at Fleerplansvinklerne i det ene Polyeder ere symetriske med Fleerplansvinklerne i det andet Polyeder; thi naar Fleerplansvinklen N er dannet af de plane Vinkler MNP, PNQ, QNR, ꝛc., da ere disse stykkeviis liig den tilsvarende Vinkel N′s plane Vinkler M′N′P′, P′N′Q′, Q′N′R′, ꝛc., hvilke synes at være ordnede paa samme Maade som de første, men de to Fleerplansvinkler have en modsat Stilling, altsaa ere de plane Vinkler i N′ anbragte i omvendt Orden af de plane Vinkler i N. Fremdeles ere Toplansvinklerne, dannede af Planerne i N og N′, stykkeviis ligestore, altsaa ere disse Fleerplansvinkler symetriske (№ 240, Anm.)

Denne Bemærkning beviser, at ikke to forskjellige Polyedre kunne være symetriske med eet og samme Polyeder.

Lad paa en Side af et hvilketsomhelst givet Polyeder A være construeert et Polyeder B, symetrisk med A. Construerer man nu, paa en anden Side af A, et Polyeder C, symetrisk med A, da er dets Fleerplansvinkler symetriske med dem i A og altsaa congruente med dem i B; fremdeles ere stedse de tilsvarende Sider congruente. Deraf følger: at de to, med det givne symetriske Polyedre, B og C, construeerte paa en eller en anden Side, som Grundflade, ere congruente.

Fig. 213. **240.** Naar en Pyramide SABCDE skjæres af en Plan *abd* parallel med Grundfladen, da:

1° Deles Kanterne SA, SB, SC, ꝛc. og Høiden SO i proportionale Dele;

2° Snittet *abcde* er en Polygon ligedannet med Grundfladen, og disse to Polygoner forholde sig som Qvadraterne af deres Afstande fra Pyramidens Spids.

Thi 1° naar Planerne ABC, *abc* ere parallele og skjæres af en tredie Plan SAB, da ere Overskjæringslinierne AB, *ab* parallele, altsaa $\triangle SAB \sim Sab$, og man har $SA : Sa = SB : Sb$, ligedan $SB : Sb = SC : Sc$ o. s. fr., følgelig $SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc =$ ꝛc. altsaa deles Kanterne SA, SB, SC, ꝛc. ved Punkterne *a*, *b*, *c*, ꝛc. i proportionale Dele. Høiden SO deles ogsaa, ved Punktet *o*, i samme Forhold, thi $BO \mathbin{\#} bo$, altsaa har man $SO : So = SB : Sb$.

2° Da $AB \mathbin{\#} ab$, $BC \mathbin{\#} bc$, $CD \mathbin{\#} cd$, ꝛc. saa er $\angle ABC = abc$, $\angle BCD = bcd$, o. s. fr.; endvidere, fordi $\triangle SAB \sim Sab$, $AB : ab = SB : Sb$, og, fordi $\triangle SBC \sim Sbc$, $SB : Sb = BC : bc$, altsaa $AB : ab = BC : bc$, ligedan $BC : bc = CD : cd$ o. s. fr. følgelig

$$AB : ab = BC : bc = CD : cd = \text{ꝛc.}$$

Altsaa: da de to Polygoner ABCDE, *abcde* ere eensvinklede og deres eensbeliggende Sider ere proportionale, saa ere de ligedannede, og forholde sig som $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; men $AB : ab = SB : Sb = SO : So$, altsaa $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{SO}^2 : \overline{So}^2$ og følgeligen

$$ABCDE : abcde = \overline{SO}^2 : \overline{So}^2.$$

Følg. Lad to hvilkesomhelst Pyramider SABCDE, SXYZ, med fælleds Spids og deres Grundflader i een Plan, altsaa med samme Høide, være skjaarne af en Plan parallel med Grundfladernes Plan, saa forholde de fremkomne Snit *abcde*, *xyz* sig som Grundfladerne ABCDE, XYZ.

Thi Snittene *abcde*, *xyz* ligge i samme Afstand So fra Spidsen S, fordi *abcxyz* er een Plan, altsaa ABCDE : *abcde* $= \overline{SO}^2 : \overline{So}^2$ og XYZ : *xyz* $= \overline{SO}^2 : \overline{So}^2$ følgelig ABCDE : *abcde* = XYZ : *xyz* eller

$$abcde : xyz = ABCDE : XYZ.$$

Altsaa, naar Grundfladerne ABCDE, XYZ ere ligestore, da ere og Snittene, i samme Høide, ligestore.

250— I. To tresidede Pyramider ere ligedannede, naar to af deres Sider ere stykkeviis ligedannede, eensbeliggende, og danne ligestore Toplansvinkler.

Naar f. Ex. Siden ABC ∽ *abc*, Siden ABS ∽ *abs* og Toplansvinklen CABS = *cabs*, da er Pyr. SABC ∽ *sabc*. Fig.214.

II. Ved ethvert Polyeder kunne en Side være taget til Grundflade, og de udenfor denne Plan liggende Spidser betragtes som Spidserne af lige saamange tresidede Pyramider, der have til fælleds Grundflade en Triangel, tegnet mellem tre Spidser i Polyedrets Grundflade. Dette antaget siger man, at

To Polyedre ere ligedannede, naar de have ligedannede Grundflader, og de eensbeliggende Spidser, udenfor disse Grundflader, ere bestemte ved stykkeviis ligedannede og eensbeliggende tresidede Pyramider.

251— Ved to ligedannede tresidede Pyramider ere de eensbeliggende Sider ligedannede, og de eensbeliggende Fleerplansvinkler congruente.

Ifølge Definitionen ere de to Pyramider SABC, *sabc* ligedannede, naar to Sider ABC, ABS ere stykkeviis ligedannede og eensbeliggende med de to Sider *abc*, *abs*, og tillige Toplansvinklen CABS = *cabs*. Lad dette være Tilfældet, altsaa ∠ABC = *abc*, ∠BAC = *bac*, ∠ABS = *abs*, ∠BAS = *bas*, saa ere disse Pyramiders eensbeliggende Sider ligedannede, og deres eensbeliggende Fleerplansvinkler congruente. Fig.214.

Tag $Ba' = ba$, $Bc' = bc$, $Bs' = bs$ og drag $a'c'$, $a's'$, $s'c'$, saa er Pyr. $s'a'Bc' \cong sabc$; thi $\triangle a'Bc' \cong abc$, fordi de have et Par ligestore Vinkler $a'Bc'$, abc, indesluttede af stykkeviis ligestore Sider, af samme Grund $\triangle s'a'B \cong sab$, $\triangle s'c'B \cong scb$, altsaa Pyr. $s'a'Bc' \cong sabc$ (№ 245).

Da $\angle Ba'c' = bac = BAC$ saa er $a'c' \neq AC$, ligedan $a's' \neq AS$, altsaa Pl. $s'a'c' \neq SAC$ (№ 230), følgeligen (№ 249) $\triangle s'a'c'$ eller $sac \sim SAC$, og $\triangle s'c'B$ eller $scb \sim SCB$, altsaa ere ved de ligedannede tresidede Pyramider SABC, $sabc$ de fire Sider stykkeviis ligedannede og eensbeliggende. Men naar dette er Tilfældet, da ere, ved to eensbeliggende Treplansvinkler S, s, de tre plane Vinkler stykkeviis ligestore og eensbeliggende, altsaa ere de eensbeliggende Fleerplansvinkler congruente (№ 240, Anm.)

Følg. I. De to Pyramiders ligedannede Triangler give $AB : ab = BC : bc = AC : ac = AS : as = SB : sb = SC : sc$ altsaa: **ved to ligedannede tresidede Pyramider ere de eensbeliggende Kanter proportionale.**

II. Af de eensbeliggende Fleerplansvinklers Congruents følger: **at to hvilkesomhelst Sider i den ene Pyramide danne samme Toplansvinkel, som de to tilsvarende Sider i den anden Pyramide.**

III. Naar en tresidet Pyramide SABC skjæres af en Plan $s'a'c'$ parallel med en Side SAC, da afskjæres en Pyramide $Bs'a'c'$ ligedannet med den hele Pyramide BSAC; thi Trianglerne $Ba's'$, $Ba'c'$ ved den ene, og Trianglerne BAS, BAC ved den anden, ere stykkeviis ligedannede, eensbeliggende, og danne samme Toplansvinkel; altsaa ere disse to Pyramider ligedannede.

IV. **Almindelig; naar en hvilkensomhelst Pyramide**
Fig. 218. **SABCDE skjæres af en Plan $abcde$ parallel med Grundfladen, da afskjæres en Pyramide $Sabcde$ ligedannet med den hele Pyramide SABCDE.** Thi Grundfladerne ABCDE,

abcde ere ligedannede, og forestille vi os AC og *ac* dragne, da er den tresidede Pyramide SABC ∾ S*abc*; altsaa er Spidsen S bestemt med Hensyn til Grundfladen ABC, som Spidsen S med Hensyn til Grundfladen *abc*, altsaa, ifølge Definitionen II, №. 250, ere de to Pyramider SABCDE, S*abcde* ligedannede.

Anm. Istedetfor de fem Betingelser, som Definitionen forudsætter, for at to tresidede Pyramider kunne være ligedannede, kan man substituere fem andre, hvoraf følger lige saamange Theoremer, iblandt hvilke man kunne bemærke: **to tresidede Pyramider ere ligedannede, naar deres eensbeliggende Kanter ere proportionale.** Thi naar man har AB : *ab* = BC : *bc* = Fig.214. AC : *ac* = AS : *as* = SB : *sb* = SC : *sc*, hvilket indeholder fem Betingelser, da ere Trianglerne eller Siderne ABC, ABS af den ene Pyramide, og Siderne *abc*, *abs* af den anden Pyramide stykkeviis ligedannede og eensbeliggende. Nu er ogsaa △ SBC ∾ *sbc*, altsaa ere de to Treplansvinkler B, *b* dannede af stykkeviis ligestore plane Vinkler, og følgeligen danne Siderne ABC, ABS af den første, og Siderne *abc*, *abs* af den anden, ligestore Toplansvinkler CABS, *cabs* (№. 240); altsaa ere de to Pyramider ligedannede.

252— Ved to ligedannede Polyedre ere de eensbeliggende Kanter og Diagonaler proportionale, de eensbeliggende Sider ligedannede, og de eensbeliggende Fleerplansvinkler congruente.

Lad ABCDE og *abcde* være de to Polyedres ligedannede Fig.215. Grundflader; lad M og N være to, ved det første Polyeder, udenfor Grundfladens Plan liggende Spidser, bestemte ved de tresidede Pyramider MABC, NABC, hvis fælleds Grundflade er ABC; lad *m* og *n* være de tilsvarende Spidser af det andet Polyeder, bestemte ved de tresidede Pyramider *mabc*, *nabc* ligedannede med MABC, NABC, saa ere Afstandene MN, *mn* proportionale med de eensbeliggende Kanter AB, *ab*.

Thi i de ligedannede Pyramider MABC, *mabc* er Toplansvinklen MACB = *macb*, og i de ligedannede Pyramider NABC, *nabc* er Toplansvinklen NACB = *nacb*, altsaa NACB — MACB = *nacb* — *macb* eller Toplansvinklen MACN = *macn*; endvidere er, ved disse Pyramider, Siden MAC ∾ *mac*, Siden NAC ∾ *nac*, altsaa: ved de to tresidede Pyramider MACN, *macn* ere to Sider stykkeviis ligedannede, eensbeliggende, og danne ligestore Toplansvinkler, følgeligen ere disse Pyramider ligedannede (№ 250), og deres eensbeliggende Kanter give Proportionen MN : *mn* = AM : *am*. Men AM : *am* = AB : *ab*, fordi Pyr. MABC ∾ *mabc*, altsaa

MN : *mn* = AB : *ab*.

Linierne MN, *mn* ere enten Kanter eller Diagonaler, altsaa ere de eensbeliggende Kanter proportionale indbyrdes og med de eensbeliggende Diagonaler.

Lad P og *p* være to andre eensbeliggende Spidser i samme Polyedre, saa har man og PM : *pm* = AB : *ab* og PN : *pn* = AB : *ab*, følgeligen

MN : *mn* = PM : *pm* = PN : *pn*.

Altsaa: Trianglen MNP, der forener tre hvilkesomhelst Spidser af det ene Polyeder, er ligedannet med Trianglen *mnp*, der forener de tre tilsvarende Spidser af det andet Polyeder.

Lad ogsaa Q og *q* være to eensbeliggende Spidser, saa er △NPQ ∾ *npq*; og de to Planer MNP, NPQ danne samme Toplansvinkel som Planerne *mnp*, *npq*.

Thi naar man drager MQ og *mq*, saa har man △MNQ ∾ *mnq*, følgeligen ∠MNQ = *mnq*. Forestille vi os nu i N en Treplansvinkel, dannet af de plane Vinkler MNQ, MNP, PNQ, og en anden i *n*, dannet af de plane Vinkler *mnq*, *mnp*, *pnq*, hvilke ere stykkeviis liig de foregaaende, saa ere de to Treplansvinkler N, *n* congruente, og følgeligen danne Planerne MNP, NPQ samme Toplansvinkel som de tilsvarende *mnp*, *npq*.

Altsaa, naar de to Triangler MNP, NPQ ligge i een Plan, i hvilket Tilfælde $\angle MNQ = MNP + PNQ$, saa har man $\angle mnq = mnp + pnq$, og de to Triangler *mnp*, *npq* ligge da ogsaa i een Plan.

Det her Beviste finder altsammen Sted, naar hvilkesomhelst Vinkler M, N, P, Q af det ene Polyeder sammenlignes med de tilsvarende *m*, *n*, *p*, *q* af det andet Polyeder.

Lad os nu antage: at det ene Polyeders Overflade er deelt i Triangler ABC, ACD, ADE, MNP, NPQ ꝛc., saa maae det andet Polyeders Overflade kunne deles i samme Antal med dem ligedannede og eensbeliggende Triangler *abc*, *acd*, *ade*, *mnp*, *npq*, ꝛc.; og, dersom flere Triangler som MNP, NPQ, ꝛc. høre til een Side, og altsaa ligge i een Plan, da ligge ogsaa de tilsvarende *mnp*, *npq*, ꝛc. i een Plan. Altsaa svarer til hver Side af det ene Polyeder een med den ligedannet Side af det andet Polyeder, og disse Polyedre have saaledes samme Antal stykkeviis ligedannede og eensbeliggende Sider. Tillige ere deres eensbeliggende Fleerplansvinkler congruente.

Thi, naar f. Ex. Fleerplansvinklen N er dannet af de plane Vinkler QNP, PNM, MNR, RNQ, da er den tilsvarende Fleerplansvinkel *n* dannet af de plane Vinkler *qnp*, *pnm*, *mnr*, *rnq*. Men disse plane Vinkler ere stykkeviis ligestore, ordnede paa samme Maade, og de Tilsvarendes Planer danne ligestore Toplansvinkler, altsaa ere de to Fleerplansvinkler N, *n* congruente.

Følg. Naar man danner mellem fire af et Polyeders Spidser en tresidet Pyramide, og en anden mellem de fire tilsvarende Spidser af et andet Polyeder, ligedannet med det første, da ere disse to Pyramider ligedannede; thi deres eensbeliggende Kanter ere proportionale (№ 251, Anm.)

253. **To ligedannede Polyedre kunne deles i samme Antal stykkeviis ligedannede og eensbeliggende tresidede Pyramider.**

Det er beviist (No. 252), at to ligedannede Polyedres Overflader kunne deles i samme Antal styktevis ligedannede og eensbeliggende Triangler. Betragte vi nu ved det ene Polyeder alle Triangletne, paa de nær der danne Fleerplansvinklen A, som Grundflader for lige saamange tresidede Pyramider, der have Spidsen A tilfælleds, da ere alle disse Pyramider tilsammentagne det opgivne Polyeder; og dele vi paa samme Maade det andet Polyedet i Pyramider, der have den med A eensbeliggende Spids *a* tilfælleds, saa er hver Pyramide, der forener fire Spidser af det ene Polyeder, ligedannet med den Pyramide, der forener de fire tilsvarende Spidser af det andet Polyeder; altsaa ere de to ligedannede Polyedre deelte i samme Antal ligedannede og eensbeliggende tresidede Pyramider.

254. I. **Et Prisme** er et Polyeder med to parallele congruente Sider, forbundne ved Parallelogrammer.

De to parallele Sider kaldes **Grundfladerne**, og en Perpendiculær mellem Grundfladerne **Høiden**.

Fig. 216. Drages i en Plan, der er parallel med en hvilkensomhelst Polygon ABCDE, rette Linier FG, GH, HI, ꝛc., stykkeviis liig og parallel med AB, BC, CD ꝛc., saa dannes en Polygon FGHIK ≅ ABCDE, og forenes disse to Polygoners eensbeliggende Vinkelspidser ved rette Linier AF, BG, CH, ꝛc., da ere Figurerne AG, BH, CI, ꝛc. Parallelogrammer (No. 152), og det construeerte Legem ABCDEFGHIK et Prisme: de to Polygoner ABCDE, FGHIK dets Grundflader.

Det bemærkes, at ved et Prisme er hver Fleerplansvinkel dannet af tre Planer.

II. **Et Prisme** er tresidet, fiirsidet, femsidet, ꝛc., eftersom Grundfladen er en Triangel, en Fiirkant, en Femkant, ꝛc.

III. **Et Prisme** er **retstaaende**, naar Kanterne AF, BG, CH, ꝛc. ere perpendiculære paa Grundfladernes Planer: enhver af disse Kanter udmaaler da Prismets Høide. I ethvert

andet Tilfælde er Prismet skjævtstaaende, og dets Høide mindre end Kanten AF.

IV. Naar Prismets Grundflader ere Parallelogrammer, da kaldes det et Parallelepiped. Altsaa er et Parallelepiped et Legem begrændset af sex Planer, som alle ere Parallelogrammer.

Et Parallelepiped ABCDEFGH benævnes ogsaa ved to Bogstaver AG, der angive Spidserne af to modstaaende Fleerplansvinkler. Fig. 218.

255. To Prismer ere congruente, naar de tre Sider af et Par Treplansvinkler ere stykkeviis congruente og eensbeliggende.

Antag at Grundfladen ABCDE ≅ A′B′C′D′E′, Siden BF ≅ B′F′ og Siden BH ≅ B′H′, saa ere, ved Treplansvinklerne B, B′, de tre plane Vinkler stykkeviis ligestore, nemlig ∠ ABC = A′B′C′, ∠ ABG = A′B′G′ og ∠ GBC = G′B′C′, og disse plane Vinkler ere ordnede paa samme, altsaa ere de to Treplansvinkler B, B′ congruente (№ 240, Anm.). Stilles nu de to Prismer ABCK, A′B′C′K′ saaledes, at Grundfladerne ABCDE, A′B′C′D′E′ dække hinanden, da falder Kanten BG paa B′G′, fordi Treplansvinklen B ≅ B′, og, fordi Parall. BF ≅ B′F′, falder GF paa G′F′, ligedan GH paa G′H′, og de øverste Grundflader FGHIK, F′G′H′I′K′ dække hinanden; altsaa have de to Prismer alle Spidser tilfælleds, og følgeligen ere de congruente (№ 246). Fig. 216.

Følg. To retstaaende Prismer med congruente Grundflader og ligestore Høider ere congruente. Thi naar Grundfladen ABCDE ≅ A′B′C′D′E′, altsaa AB = A′B′, og Høiden BG = B′G′, saa er Rect. BF ≅ B′F′, ligedan Rect. BH ≅ B′H′, altsaa ere de tre Sider af Treplansvinklen B stykkeviis congruente med de tre Sider af Treplansvinklen B′; følgeligen ere de to Prismer congruente.

Fig. 217. **256— Naar et hvilketsomhelst Prisme AH skjæres af parallele Planer, da ere Snittene NOPQR, STVXY congruente Polygoner.**

Thi, naar de to parallele Planer skjæres af en tredie Plan ABGF, da ere Overskjæringslinierne NO, ST parallele, men Kanten AF ≠ BG, altsaa NO = ST; ligedan OP = TV, PQ = VX, ꝛc., og, fordi NO ≠ ST, OP ≠ TV, PQ ≠ VX, ꝛc., er ∠NOP = STV, ∠OPQ = TVX, ꝛc.; altsaa ere de to Polygoner NOPQR, STVXY eensſidede og eensvinklede, og følgeligen ere de congruente.

Følg. Naar Snittet er parallel med Grundfladen, da er det og congruent med samme.

257— I ethvert Parallelepiped ere de modstaaende Sider congruente og parallele.

Fig. 218. Ifølge Definitionen ere Grundfladerne AC, EG congruente og parallele. Der staaer altsaa tilbage at bevise, at dette ogsaa finder Sted ved de øvrige modstaaende Sider f. Ex. ved AH og BG. Nu er AD = og ≠ BC, fordi Figuren AC er et Parallelogram; af en lignende Grund er AE = og ≠ BF, altsaa ∠DAE = CBF og Planen DAE ≠ CBF (Nº 228); altsaa ere Parallelogrammerne AH, BG congruente og deres Planer parallele. Man beviser paa samme Maade at de modstaaende Sider AF, DG ere congruente og parallele.

Følg. Ifølge denne Egenskab kunne hvilkesomhelst to modstaaende Sider af et Parallelepiped betragtes som dets Grundflader.

Anm. Et Parallelepiped er bestemt og kan construeres, naar, ved een af Treplansvinklerne f. Ex. B, de tre Kanter BA, BC, BF, og de tre plane Vinkler ABC, ABF, FBC ere givne. Man lægger gjennem Endepunktet af hver Kant en Plan, parallel med Planen, som bestemmes af de to øvrige Kanter, nemlig gjennem A Planen DAE ≠ CBF, gjennem C Planen DCG ≠ ABF, og gjennem F Planen EFG ≠ ABC. Ved disse Pla-

ners gjensidige Overskjæring fremstaaer det forlangte Parallelepiped AG.

258— Ved ethvert Parallelepiped ere de modstaaende Treplansvinkler symetriske, og Diagonalerne, der forene disse Vinklers Spidser, halvere hinanden.

Sammenligner man to modstaaende Treplansvinkler f. Ex. A og G, da finder man ∠EAB = EFB = HGC, ∠DAE = DHE = CGF og ∠DAB = DCB = HGF, altsaa ere de tre plane Vinkler stykkeviis ligestore, men det sees let, at de i G følge i omvendt Orden af dem i A, altsaa ere de to modstaaende Treplansvinkler A og G symetriske (№ 240, Anm.) Fig. 218.

Forestille vi os disse modstaaende Vinklers Spidser A og G, ligedan C og E forenede ved Diagonalerne AG, CE, da er, fordi AE = og ≠ CG, Figuren AEGC et Parallelogram, altsaa halvere Diagonalerne AG, CE hinanden. Man beviser ogsaa at Diagonalen AG og en anden DF halvere hinanden; altsaa have de fire Diagonaler AG, CE, DF, BH fælleds Midtepunkt, hvilket kunne betragtes som Parallelepipedets Centrum.

259— Planen BDHF, lagt gjennem to modstaaende parallele Kanter BF, DH, deler Parallelepipedet AG i to symetriske tresidede Prismer ABDEFH, GHFCDB. Fig. 219.

Disse to Legemer ere Prismer; thi Trianglerne ABD, EFH ere congruente og deres Planer parallele, tillige ere Siderne AF, BH, DE Parallelogrammer, altsaa er Legemet ABDEFH et Prisme; og det Samme er Tilfældet med Legemet GHFCDB. Disse to tresidede Prismer ere symetriske.

Thi construeres paa Grundfladen ABD Prismet ABDE′F′H′ symetrisk med ABDEFH, saa er (№ 248) Siden AF′ ≅ AF, Siden AH′ ≅ AH, men de to Prismer GHFCDB, ABDE′F′H′ have Grundfladen GHF ≅ ABD, Siden GD ≅ AF ≅ AF′ og Siden GB ≅ AH ≅ AH′, altsaa ere i disse to Prismer de tre Sider af et Par Treplansvinkler G, A stykkeviis congruente og eensbeliggende, hvoraf følger at Prismerne ere congruente (№ 255).

Men det ene Prisme ABDE'F'H' er symetrisk med ABDEFH, altsaa er og det andet GHFCDB symetrisk med ABDEFH.

Fig. 220. 260— Et Parallelepiped er retvinklet, naar alle Siderne ere Rectangler. Ved hver Treplansvinkel f. Ex. ved B ere de tre plane Vinkler ABC, ABF, FBC rette, og hver af de tre Kanter BA, BC, BF perpendiculær paa Planen bestemt ved de to øvrige; thi naar Linien BF ⊥ AB og BC, da er Linien BF ⊥ Pl. ABC, altsaa ere og de tre Planer, som danne Vinklen B, perpendiculære paa hinanden (№ 233, Anm.). Alle Treplansvinklerne ere congruente.

Naar de tre Kanter BA, BC, BF ere ligestore, da ere alle sex Sider ligestore Qvadrater. Et saadant Legem kaldes en Cubus. Ved dette Legem ere tillige alle Fleerplansvinklerne congruente, altsaa er en Cubus et regulært Polyeder (№ 243).

Polyedres Udmaaling.

Overflade.

261— Udmaalingen af et Polyeders Overflade har ingen videre Vanskelighed, thi den er sammensat af retlinede plane Figurer, hvis Udmaaling er os bekjendt af Planimetrien. Her bemærkes derfor kun,

1° At en regulær Pyramides Overflade er liig Productet af Grundfladens Perimeter og den halve Sum af dens mindste Radius og Perpendiculæren fældet fra Spidsen ned paa een af dens Sider. Thi, da Grundfladen er en regulær Polygon, saa er dens Fladeindhold liig Perimeteren multipliceert med den halve mindste Radius, og, da de om Spidsen liggende Triangler ere congruente, og altsaa have ligestore Høider, saa er deres Sum liig Summen af deres Grundlinier eller Grundfladens Perimeter multipliceert med den halve Perpendiculær fældet fra Spidsen ned paa een af Grundfladens Sider; altsaa er Pyramidens Overflade liig Productet af Grundfladens Perimeter

og den halve Sum af dens mindste Radius og Perpendiculæren nedfældet fra Spidsen paa een af dens Sider.

2º Ved et hvilketsomhelst Prisme AH er Summen af de mellem Grundfladerne staaende Sider liig Productet af een af de parallele Kanter AF, BG ꝛc. og Perimeteren af et plan Snit NOPQR, perpendiculær paa denne Kant. Thi af Nº 217 følger, at Siderne NO, OP, ꝛc. af Polygonen NOPQR ere Høiderne af Parallelogrammerne AG, BH, ꝛc., naar Kanterne AF, BG, ꝛc. tages til Grundlinier, altsaa Parall. AG = AF × NO, Parall. BH = BG × OP, ꝛc. men Kanten AF = BG = ꝛc., altsaa er Summen af disse Parallelogrammer = AF × (NO + OP + ꝛc. eller Perim. NOPQR). Fig. 217.

Altsaa: ved et retstaaende Prisme er Fladeindholdet af de mellem Grundfladerne staaende Sider liig Productet af Høiden og Grundfladens Perimeter. Lægges nu hertil Summen af Grundfladerne, saa har man Prismets hele Overflade.

Et retvinklet Parallelepipeds Overflade findes ved at udmaale de tre Kanter BA, BC, BF af en Treplansvinkel B. Thi Summen af denne Vinkels tre Sider, nemlig Parall. AC + AF + BG = AB × BC + AB × BF + BC × BF, og disse tre Sider ere congruente med de modstaaende EG, DG, AH, altsaa er det retvinklede Parallelepiped AG's Overflade = 2 (AB × BC + AB × BF + BC × BF). Fig. 220.

Naar Kanten AB = BC = BF, da er Legemet en Cubus, og altsaa dennes Overflade $= 2 . 3\, \overline{AB}^2 = 6\, \overline{AB}^2$.

262— Ligedannede Polyedres Overflader forholde sig som Qvadraterne af deres eensbeliggende Kanter eller Diagonaler.

Thi de to ligedannede Polyedre have samme Antal stykkeviis ligedannede og eensbeliggende Sider (Nº 252). De to eensbeliggende Sider ABCDE, *abcde* forholde sig som Qvadraterne af de Fig. 215.

eensbeliggende Kanter AB, *ab*, eller som Qvadraterne af de eensbeliggende Diagonaler AN, *an*, og samme Forhold finder Sted ved ethvert andet Par eensbeliggende Sider; altsaa forholder Summen af alle Siderne af det ene Polyeder, eller dette Polyeders Overflade, sig til det andet Polyeders Overflade, som Qvadratet af en hvilkensomhelst Kant eller Diagonal i det Første, til Qvadratet af den tilsvarende Linie i det Andet.

Cubikindhold.

263— Et Legem sammenlignes, med Hensyn til Indhold, almindeligen med en Cubus, taget til Eenhed. Productet af det fundne Tal og denne Eenhed udtrykker Legemets **Cubikindhold.**

Fig. 221. **264— De to symetriske tresidede Prismer ABDEFH, DBCHFG, i hvilke et Parallelepiped AG deles ved et Diagonalsnit, ere ligestore.**

Lægges, perpendiculær paa Kanten BF, gjennem Spidserne B og F Planer, der skjære de tre Kanter AE, DH, CG, af samme Parallelepiped, i Punkterne *a, d, c* og *e, h, g,* da ere de fremkomne Snit B*adc*, F*ehg* congruente Parallelogrammer. Disse Snit ere congruente, fordi deres Planer, perpendiculære paa een ret Linie, ere parallele (№ 256), og de ere Parallelogrammer, fordi to modstaaende Sider af samme Snit f. Ex. B*a*, *cd* ere Overskjæringslininier i to parallele Planer BE, CH, skjaarne af en tredie Plan.

Af samme Grund er Figuren B*ae*F et Parallelogram, saavelsom de øvrige mellem Grundfladerne staaende Sider BF*gc*, *cdhg*, *adhe* af Legemet B*adc*F*ehg*; altsaa er dette Legem et Prisme; og dette Prisme er retstaaende, fordi Kanten BF er perpendiculær paa Grundfladens Plan (№ 254, I, III).

Deles dette retstaaende Prisme B*h* ved Planen BFHD i to tresidede Prismer *a*B*de*, *d*B*ch*, da kan man bevise, at det skjævtstaaende tresidede Prisme ABDE er ligestort med det retstaaende *a*B*de*. De have een Deel ABD*he*F tilfælleds, altsaa er det til:

strækkeligt at bevise, at de øvrege Dele, nemlig Legemerne *a*B*d*DA, *e*F*h*HE, ere ligestore.

Parallelogrammerne ABFE, *a*BF*e* have Siden BF tilfælleds, altsaa ere de modstaaende AE, *ae* ligestore; og, naar det fælleds Stykke A*e* frabrages, A*a* = E*e*. Man beviser paa samme Maade, at D*d* = H*h*. Bringes nu de to Legemer *a*B*d*DA, *e*F*h*HE med deres congruente Grundflader *a*B*d*, *e*F*h* paa hinanden, Punktet *e* i *a*; Punktet *h* i *d*, da falder Linien *e*E paa *a*A, fordi de ere perpendiculære paa een Plan B*ad*, altsaa Punktet E i A; ligedan H i D, og disse to Legemer bække hinanden. Altsaa er det skjævtstaaende tresidede Prisme ABDE ligestort med det retstaaende *a*B*de*.

Man beviser paa samme Maade, at det skjævtstaaende Prisme DBCH er ligestort med det retstaaende *d*B*ch*; men de to retstaaende Prismer *a*B*de*, *d*B*ch* ere congruente, forbi de have congruente Grundflader *a*B*d*, *d*B*c* og samme Høide BF (Nº 255, Følg.), altsaa ere de to symetriske Prismer ABDE, DBCH ligestore.

Følg. Ethvert tresidet Prisme ABDE er Halvdelen af et Parallelepiped AG, med hvilket det har en Treplansvinkel A og dennes tre Kanter AB, AD, AE tilfælleds.

265— Naar to Parallelepipeder AG, AL, have en fælleds Grundflade AC og deres øverste Grundflader EG, IL i een Plan, mellem samme Paralleler EK, HL, da ere de ligestore. Fig. 222.

Der kunne indtræffe tre Tilfælde: at EI er større, eller mindre, eller liig EF, men Beviset er eens for dem alle. Vi bevise først, at de to tresidede Prismer AEIDHM, BFKCGL ere congruente.

Da AE ≠ BF og EH ≠ FG, saa er ∠ AEF = BFK, ∠ HEF = GFK, ∠ HEA = GFB, altsaa ere, ved de to Treplansvinkler E og F, de tre plane Vinkler stykkeviis ligestore og ordnede paa samme Maade, følgeligen ere disse to Tre-

plansvinkler E, F, congruente (№ 240, Anm.) Bringes nu de to Prismer AEM, BFL med deres congruente Grundflader AEI, BFK paa hinanden, saa, fordi Treplansvinklen E ≅ F, dække ogsaa de ligestore Kanter EH, FG hinanden. Der behøves intet videre for at slutte, at de to Prismer nu have netop samme Begrændsning; thi Grundfladen AEI og Kanten EH bestemme Prismet AEM, ligesom Grundfladen BFK og Kanten FG bestemme Prismet BFL (№ 255); altsaa ere disse Prismer congruente.

Men naar man fra Legemet AL afskjærer Prismet AEM, saa har man Parallelepipedet AIL, og naar man fra samme Legem AL afskjærer Prismet BFL, saa har man Parallelepipedet AEG, altsaa ere de to Parallelepipeder AIL, AEG ligestore.

266— To Parallelepipeder paa samme Grundflade og med samme Høide ere ligestore.

Fig. 222. De to Parallelepipeder AG, AL, med fælleds Grundflade AC og samme Høide, have deres øverste Grundflader EG, IL i een Plan. I Parallelogrammet AF er Siden EF = og ≠ AB, og i Parallelogrammet AK er Siden IK = og ≠ AB, altsaa EF = og ≠ IK; ligeledes FG = og ≠ KL, følgeligen er Figuren NOPQ, dannet ved at forlængre FE, GH, KL, IM, et Parallelogram congruent med EG og IL. Forestille vi os et tredie Parallelepiped, hvis Grundflader ere AC og NP, da er dette Parallelepiped AP = AG, fordi de have Grundfladen AC tilfælleds og de øverste Grundflader EG, NP i een Plan mellem Parallelerne FN, GQ (№ 265); og, af samme Grund, er Parallelepipedet AP = AL, altsaa Parallelep. AG = AL.

267— Ethvert Parallelepiped kan forvandles til et retvinklet Parallelepiped af samme Høide, og med en Grundflade af samme Indhold.

Fig. 223. Lad AG være det opgivne Parallelepiped. Opreises fra Punkterne A, B, C, D Linierne AI, BK, CL, DM perpendicu-

lære paa Grundfladens Plan, saa dannes et Parallelepiped AL = AG, og de mellem Grundfladerne staaende Sider AK, BL x. ere Rectangler. Dersom Grundfladen AC er en Rectangel, saa er AL det forlangte retvinklede Parallelepiped, ligestort med AG. Men er Figuren ABCD ikke en Rectangel, saa drag AX og BV perpendiculær paa AB, og XZ, VY perpendiculære paa Grundfladen. Det dannede Legem ABVXIKYZ er et retvinklet Parallelepiped, fordi, ifølge Constructionen, Grundfladerne ABVX, IKYZ ere Rectangler, saavelsom de øvrige Sider, idet Kanterne AI, XZ, x. ere perpendiculære paa Grundfladens Plan. De to Parallelepipeder AY, AL, der kunne ansees at have samme Grundflade AK og samme Høide AX, ere ligestore (№ 266), altsaa er Parallelepidet AG, som er = AL, ligestort med det retvinklede Parallelepiped AY af samme Høide AI og med en Grundflade AV = AC. Fig. 224. Fig. 223 og 224.

268— To retvinklede Parallelepipeder AG, AL, paa samme Grundflade AC, forholde sig som Høiderne AE, AI. Fig. 225.

Lad os først antage, at Høiderne AE, AI forholde sig som to hele Tal f. Ex. som 8 til 15. Deler man nu AE i 15 ligestore Dele, saa indeholder AI de 8, og lægger man gjennem alle Delingspunkterne x, y, z x. Planer parallele med Grundfladen, da deles Legemet AG i 15 Parallelepipeder, hvilke ere ligestore, fordi Høiderne Ax, xy, yz x. ere ligestore, og Grundfladerne ere congruente, som Snit parallele med Grundfladen AC; men Legemet AL indeholder 8 af disse Parallelepipeder, altsaa Parallelep. AG : Pp. AL = 15 : 8 eller = Høiderne AE : AI.

Ogsaa naar Forholdet af AE : AI ikke kan udtrykkes i Tal har man Proportionen Pp. AG : Pp. AL = AE : AI; thi hvis ikke, saa lad

Pp. AG : Pp. AL = AE : AO. (1)

Deles AE i ligestore men mindre Dele end IO, da falder i det mindste eet Delingspunkt m mellem I og O. Lad P være det Parallelepiped, der, paa Grundfladen AC, har Am til Høide,

saa har man, fordi Høiderne AE, Am forholde sig som to hele Tal, Proportionen

$$\text{Pp. } AG : P = AE : Am$$

som, i Forbindelse med Proportionen (1), giver

$$\text{Pp. } AL : P = AO : Am$$

hvilket er umuligt, fordi $AL < P$ og $AO > Am$; altsaa er det fjerde Led i Proportionen $\text{Pp. } AG : \text{Pp. } AL = AE : x$ ikke $> AI$. Og da man, ved et lignende Raisonnement, beviser at det fjerde Led er heller ikke $< AI$, saa er det $= AI$; altsaa forholde to retvinklede Parallelepipeder, paa samme Grundflade, sig som Høiderne.

Fig. 226. 269— To retvinklede Parallelepipeder AG, AK, af samme Høide AE, forholde sig som Grundfladerne AC, AN.

Lad de to Legemer være stillede saaledes ved Siden af hinanden som Figuren viser, og lad Planen ONKL forlænget skjære Planen DCGH efter Linien PQ, saa har man et tredie Parallelepiped AQ, der kunne sammenlignes med hvert især af de opgivne AG, AK. Parallelepipederne AG, AQ, der have samme Grundflade AEHD, forholde sig som Høiderne AB, AO, og Parallelepipederne AQ, AK, der have samme Grundflade AOLE, forholde sig som Høiderne AD, AM; altsaa har man de to Proportioner

$$\text{Pp. } AG : \text{Pp. } AQ = AB : AO$$
$$\text{Pp. } AQ : \text{Pp. } AK = AD : AM.$$

Multiplicer Led for Led, og reduceer, saa har man

$$\text{Pp. } AG : \text{Pp. } AK = AB \times AD : AO \times AM.$$

Men $AB \times AD =$ Grundfladen AC, og $AO \times AM =$ Grundfladen AN, altsaa forholde to retvinklede Parallelepipeder, af samme Høide, sig som Grundfladerne.

270— To hvilkesomhelst retvinklede Parallelepipeder forholde sig som Producterne af Grundflade og Høide,

eller som Producterne af deres tre Dimensioner *) ɔ: tre Kanter som danne en Treplansvinkel.

Lad de to Parallelepipeder AG, AZ være stillede saaledes, at deres Overflader have Vinklen BAE tilfælleds. Forlængre de Planer, som ere fornødne til at danne et tredie retvinklet Parallelepiped AK, paa samme Grundflade AN som AZ, og af samme Høide AE som AG. Fig. 226.

De to Parallelepipeder AG, AK, af samme Høide, forholde sig som Grundfladerne ABCD, AMNO (№ 269), og de to Parallelepipeder AK, AZ, paa samme Grundflade AMNO, forholde sig som Høiderne AE, AX (№ 268) altsaa har man de to Proportioner

$$\text{Pp. } AG : \text{Pp. } AK = ABCD : AMNO$$
$$\text{Pp. } AK : \text{Pp. } AZ = AE : AX.$$

Multipliceer Led for Led og reduceer, saa haves

$$\text{Pp. } AG : \text{Pp. } AZ = ABCD \times AE : AMNO \times AX,$$

eller, fordi $ABCD = AB \times AD$, og $AMNO = AO \times AM$,

$$\text{Pp. } AG : \text{Pp. } AZ = AB \times AD \times AE : AO \times AM \times AX.$$

Altsaa forholde to hvilkesomhelst retvinklede Parallelepipeder sig som Producterne af Grundflade og Høide, eller som Producterne af deres tre Dimensioner.

Anm. Sammenlignes et hvilketsomhelst retvinklet Parallelepiped AG med et andet *ag*, hvor de tre Kanter *ab*, *ad*, *ae* ere

---

*) Ved Dimensioner burde egentligen forstaaes de Elementer af en Rumstørrelse, der tjene til at bestemme dens Storhed. Saaledes ved den rette Linie er Linien selv Dimensionen, ved Rectanglen ere to sammenstødende Sider de to Dimensioner, ved Parallelepipedet ere tre Kanter af en Treplansvinkel de tre Dimensioner. Kun faa Rumstørrelser kunne bestemmes ved sine egne Elementer, men derimod kunne enhver forvandles til en anden, der besidder denne Egenskab: saaledes kunne en Flade forvandles til en Rectangel, et Legem til et Parallelepiped, altsaa denne Flade, eller dette Legem blive udtrykt ved Productet af to, eller af tre, paa hinanden perpendiculære Linier, Rectanglens eller Parallelepipedets Dimensioner; men disse Dimensioner maae ikke forvexles med den forvandlede Rumstørrelses Dimensioner. Vi see altsaa at Ordet Dimension har faaet en mere udvidet Betydning: Udstrækning i de forskjellige Retninger, Længde, Bredde, Høide.

ligestore og liig Linie-Eenheden, altsaa med en Cubus, og følgelig gen Grundfladen $abcd = \overline{ab}^2 = 1$, saa har man

Cub. ag : Pp. $AG = 1 : ABCD \times AE = 1 : AB \times AD \times AE$

altsaa, naar denne Cubus ag tages til Eenhed for Legemer, er

$$\text{Pp. } AG = ABCD \times AE = AB \times AD \times AE$$

d. v. s. et hvilketsomhelst retvinklet Parallelepipeds Cubikindhold er liig Productet af Grundfladen og Høiden, eller Productet af Parallelepipedets tre Dimensioner. Og herunder forstaaes: at dette Parallelepiped AG indeholder en til Eenhed tagen Cubus ag, hvis Kant ab er liig Linie-Eenheden, lige saamange Gange som Productet af de tre Linier AB, AD, AE, udmaalte med Linien ab, indeholder Eenheden.

Ved en Cubus ere de tre Dimensioner ligestore, altsaa, naar Kanten er 1, 2, 3 ꝛc., da er Indholdet af denne Cubus liig 1^3, 2^3, 3^3, ꝛc. eller 1, 8, 27, ꝛc. Heraf kommer Benævnelsen: Cubus af et Tal, istedetfor tredie Potens af dette Tal, eller Productet af tre ligestore Factorer.

271— **Et Parallelepipeds, og, almindeligere, et hvilketsomhelst Prismes Cubikindhold er liig Productet af Grundfladen og Høiden.**

Thi 1º Et hvilketsomhelst Parallelepiped er ligestort med et retvinklet Parallelepiped af samme Høide og med en Grundflade af samme Indhold (Nº 267), og det sidste Legems Cubikindhold er liig Productet af dets Grundflade og Høide (Nº 270), altsaa er og det første Legems Cubikindhold liig Productet af dets Grundflade og Høide.

2º Ethvert tresidet Prisme er Halvdelen af et Parallelepiped af samme Høide og med en dobbelt saa stor Grundflade (Nº 264, Følg.), altsaa er det tresidede Prismes Cubikindhold liig Productet af dets Grundflade, Halvdelen af Parallelepipedets Grundflade, og dets Høide.

3º Et hvilketsomhelst Prisme kan deles i lige saamange tresidede Prismer af samme Høide, som dets Grundflade, ved Diagonaler, kunde deles i Triangler; følgeligen (2º) er et hvilketsomhelst Prismes Cubikindhold liig Summen af disse Triangler, eller dets Grundflade, multipliceert med dets Høide.

Følg. Deraf følger at to hvilkesomhelst Prismer forholde sig som Producterne af Grundflade og Høide: ere disse Producter ligestore, da have de to Prismer samme Cubikindhold. Deraf følger ogsaa: at to Prismer af samme Høide forholde sig som Grundfladerne, og at to Prismer med ligestore Grundflader forholde sig som Høiderne.

272— To tresidede Pyramider paa ligestore Grundflader og med ligestore Høider ere ligestore.

Lad de to Pyramider SABC, *sabc* have ligestore Grundflader ABC, *abc*, som vi antage at ligge i een Plan, og ligestore Høider = AT. Dersom de to Pyramider kunne være uligestore, saa lad *sabc* være den mindste, og lad deres Differens være ligestort med et Prisme construeert paa Grundfladen ABC, og hvis Høide er liig AX. Fig. 227.

Deel Høiden AT i ligestore men mindre Dele end AX, og lad α være een af disse Dele; læg gjennem Delingspunkterne Planer parallel med Grundfladernes Plan, saa ere Snittene, der fremkomme ved hver især af disse Planer, i de to Pyramider ligestore (Nº 249, Følg.), saaledes DEF = *def*, GHI = *ghi*, ꝛc. Construeer om Pyramiden SABC Prismer paa Trianglerne ABC, DEF, GHI ꝛc. som Grundflader, og med Delene AD, DG, GK ꝛc. af Linien SA som Kanter; construeer i den anden Pyramide paa Trianglerne *def*, *ghi*, *klm*, ꝛc. Prismer, der have de corresponderende Dele af *sa* til Kanter: alle disse Prismer have samme Høide α.

Summen af alle Prismerne om Pyramiden SABC er større end denne, og Summen af alle Prismerne i Pyramiden *sabc* er,

mindre end denne, altsaa er Differensen mellem de to Summer af Prismer større end Differensen af de to Pyramider.

Nu er, fra Grundfladerne ABC, *abc* at regne, det andet Prisme DEFG, om Pyramiden SABC, ligestort med det første Prisme *defa*, i Pyramiden *sabc*, fordi de have ligestore Grundflader DEF, *def* og samme Høide *α*; af samme Grund er det tredie Prisme GHIK, om Pyramiden SABC, ligestort med det andet Prisme *ghid*, i Pyramiden *sabc* o. s. f. indtil det sidste Prisme ved den ene og den anden Pyramide; altsaa er det første Prisme ABCD, om Pyramiden SABC, liig Differensen mellem de to Summer af Prismer. Disse to Summers Differens er større end de to Pyramiders Differens, følgeligen skulde Prismet ABCD være større end Prismet ABCX, men det er derimod mindre, fordi, paa samme Grundflade ABC, dets Høide $\alpha <$ AX, Høiden af det andet. Altsaa kunde den Hypothes, fra hvilken man gik ud, ei finde Sted; altsaa ere de to Pyramider SABC, *sabc*, paa ligestore Grundflader og med ligestore Høider, ligestore.

273. Enhver tresidet Pyramide er en Trediedeel af et tresidet Prisme paa samme Grundflade og af samme Høide.

Fig. 228. Lad SABC være Pyramiden og ABCDES Prismet, paa samme Grundflade ABC og af samme Høide.

Naar man fra dette Prisme afskjærer Pyramiden SABC, saa har man en firsidet Pyramide SACDE, paa Grundfladen ACDE og med Spidsen i S. Denne firsidede Pyramide kunde ved en Plan SCE, lagt gjennem Diagonalen CE og Spidsen S, deles i to tresidede Pyramider SACE, SDCE af samme Høide og ligestore Grundflader ACE, DCE, som Halvdele af samme Parallelogram, altsaa Pyr. SACE = SDCE. Pyramiderne SDCE og SABC have ligestore Grundflader ABC, DES og samme Høide, nemlig Afstanden mellem de parallele Planer ABC, DES, altsaa Pyr. SABC = SDCE = SACE. Men disse tre lige-

store Pyramider udgjøre tilsammen Prismet ABD, altsaa er een af dem, Pyramiden SABC en Trediedeel af Prismet ABD, paa samme Grundflade og af samme Høide.

Følg. En tresidet Pyramides Cubikindhold er liig en Trediedeel af Productet af Grundfladen og Høiden.

274— Cubikindholdet af en hvilkensomhelst Pyramide SABCDE er liig en Trediedeel af Productet af Grundfladen ABCDE og Høiden SO. Fig. 213.

Thi Planerne SEB, SEC, lagte gjennem Spidsen S og Diagonalerne EB, EC, dele Pyramiden SABCDE i tresidede Pyramider af samme Høide SO. Disse tresidede Pyramiders Cubikindhold findes ved at multiplicere hver af Grundfladerne ABE, BCE, CDE med en Trediedeel af Høiden SO (No. 273), altsaa er Summen, eller Cubikindholdet af Pyramiden SABCDE liig Summen af Trianglerne ABE, BCE, CDE, eller Polygonen ABCDE $\times \frac{1}{3}$ SO; altsaa er en hvilkensomhelst Pyramides Cubikindhold liig en Trediedeel af Productet af dens Grundflade og Høide.

Følg. I. Enhver Pyramide er en Trediedeel af et Prisme paa samme Grundflade og af samme Høide.

II. To Pyramider med ligestore Høider forholde sig som Grundfladerne, og to Pyramider med ligestore Grundflader forholde sig som Høiderne.

Anm. Man finder Cubikindholdet af et hvilketsomhelst Polyeder ved at dele det i Pyramider, og denne Deling kan udføres paa flere Maader: een af de simpleste er at lægge alle Delingsplanerne gjennem Spidsen af een og samme Fleerplansvinkel, hvorved fremstaae lige saamange Pyramider som Polyedret har Sider med Undtagelse af de Sider, som danne denne Fleerplansvinkel.

275— To symetriske Polyedre ere ligestore.

Thi 1º To symetriske tresidede Pyramider SABC, S′ABC have samme Maal, nemlig Productet af Grundfladen ABC og en Trediedeel af Høiden SO eller S′O, altsaa ere disse Pyramider ligestore. Fig. 211.

2° Naar man paa en hvilkensomhelst Maade deler det ene af de symetriske Polyedre i tresidede Pyramider, saa kan man ogsaa dele det andet i samme Antal tresidede Pyramider, der ere stykkeviis symetriske med de første; men de symetriske tresidede Pyramider ere ligestore, altsaa ere og de hele Polyedre ligestore.

276— En afkortet Pyramide med parallele Grundflader er liig Summen af tre Pyramider, hvilke, af samme Høide som den, staae paa dens Grundflader og en Mellemproportionalflade til disse to.

Fig.229. Lad Pyramiden SABCDE og den tresidede Pyramide S′A′B′C′ have samme Høide og ligestore Grundflader, som vi antage at ligge i een Plan; og lad dem være skjaarne af en Plan parallel med Grundfladernes Plan, saa ere de fremkomne Snit *abcde*, *a′b′c′* ligestore, fordi Grundfladerne ABCDE, A′B′C′ ere ligestore (N° 249, Følg.) Pyr. S*abcde* = S*a′b′c′*, fordi de have samme Høide og ligestore Grundflader; af samme Grund Pyr. SABCDE = S′A′B′C′, altsaa er den afkortede Pyramide ABC*cde* = A′B′C′*c′a′b′*, og man behøver følgeligen kun at bevise Sætningen ved den afkortede tresidede Pyramide.

Fig.230. Lad ABC*cab* være en afkortet Pyramide med parallele Grundflader. Læg gjennem de tre Punkter A, *b*, C en Plan A*b*C, der deler den afkortede Pyramide i en tresidet Pyramide *b*ABC og en firsidet Pyramide *b*AC*ca*. Den første staaer paa den afkortede Pyramides underste Grundflade ABC, og har samme Høide som den, fordi Spidsen *b* ligger i den øverste Grundflade.

Deel den firsidede Pyramide *b*AC*ca* ved en Plan *ab*C, lagt gjennem de tre Punkter *a*, *b*, C, i to tresidede Pyramider *bac*C, *ba*AC. Den første staaer paa den afkortede Pyramides øverste Grundflade *bac*, og har samme Høide som den, fordi Spidsen C ligger i den underste Grundflade. Vi have altsaa to af de tre Pyramider, hvis Sum skulde være liig den afkortede Pyramide.

Der staaer tilbage at betragte den tredie $baAC$. Drag $bD \neq aA$, og lad os forestille os en ny Pyramide $aACD$ med Spidsen i D, saa have disse to Pyramider samme Grundflade aAC, og samme Høide, fordi Spidserne b, D ligge i en Linie $bD \neq aA$ følgeligen og $\neq$ Pl. aAC, altsaa Pyr. $baAC = aACD$. Men Pyramiden $aACD$ kunne ansees at have Spidsen i a, og altsaa have samme Høide som den afkortede Pyramide. Hvad dens Grundflade ADC angaaer, da er den Mellemproportionalstørrelsen til Grundfladerne ABC, abc. Thi de to Triangler ADC, abc have $\angle A = a$, og Siden $AD = ab$, altsaa (№ 188)

$$\triangle ADC : \triangle abc = AC : ac.$$

Ligeledes $\triangle ABC : \triangle ADC = AB : AD$ eller ab og, fordi $\triangle ABC \sim abc$, har man $AB : ab = AC : ac$, følgeligen

$$\triangle ABC : \triangle ADC = \triangle ADC : \triangle abc$$

d. v. s. Grundfladen ADC er Mellemproportionalstørrelsen til de to Grundflader ABC, abc. Altsaa er en affkortet Pyramide med parallele Grundflader liig Summen af tre Pyramider, hvilke, af samme Høide som den, staae paa dens underste Grundflade, dens øverste Grundflade, og paa en Mellemproportionalflade til disse to.

277— **Et skraataffskjaaren tresidet Prisme ABCDEF er liig Summen af tre Pyramider, der staae paa samme Grundflade ABC og have Spidserne i de tre Punkter D, E, F af den modstaaende Side.** Fig. 231.

Lægges en Plan EAC, gjennem de tre Punkter E, A, C, da deles det afskjaarne Prisme i en tresidet Pyramide EABC, der staaer paa samme Grundflade ABC og har Spidsen i E, og en fiirsidet Pyramide EACFD, der staaer paa Grundfladen ACFD og har Spidsen i E.

Deel denne fiirsidede Pyramide ved en Plan EDC, lagt gjennem de tre Punkter E, D, C, i to tresidede Pyramider EACD, EFCD. Pyramiden EACD, der har Trianglen ACD

til Grundflade og Spidsen i E, er ligestor med en Pyramide DABC, paa samme Grundflade ACD og med Spidsen i B, thi den har og samme Høide, forbi Linien BE ≠ Pl. CAD, og denne Pyramide DABC kan ansees at staae paa Grundfladen ABC og have Spidsen i D.

Den tredie Pyramide EFCD kan først forvandles til AECF, thi disse to Pyramider have samme Grundflade ECF og samme Høide, fordi AD ≠ Pl. ECF, altsaa Pyr. EFCD = AECF. Man kan atter forvandle denne Pyramide AECF til FABC, thi disse to Pyramider have samme Grundflade ACF og samme Høide, fordi Spidserne E og B ligge i en Linie parallel med Grundfladens Plan, altsaa Pyr. AECF eller Pyr. EFCD = FABC, og denne kan ansees at staae paa Grundfladen ABC og have Spidsen i F.

Altsaa er det skraataffkjaarne Prisme ABCDEF liig Summen af tre Pyramider, der staae paa samme Grundflade ABC og have Spidserne i de tre Punkter D, E, F af den modstaaende Side.

Følg. Naar Kanterne AD, BE, CF staae perpendiculære paa Grundfladens Plan, da ere de Høiderne af de tre Pyramider, hvis Sum er liig det affkjaarne Prisme, og følgeligen dette Legems Cubikindhold = $\frac{1}{3}$ ABC × (AD + BE + CF).

278. Naar to tresidede Pyramider have en fælleds Treplansvinkel, da forholde de sig som Producterne af denne Vinkels tre Kanter.

Fig. 232. Lad Pyramiderne være SABC, S′AB′C′, der have Treplansvinklen A tilfælleds.

Forestille vi os en Pyramide at staae paa Grundfladen AB′C′ og have Spidsen i S, saa forholde de to Pyramider SABC, SAB′C′, af samme Høide, sig som Grundfladerne ABC, AB′C′, eller, da disse to Triangler have en fælleds Vinkel B′AC′, som AB × AC : AB′ × AC′ (No. 188). De to Pyramider SAB′C′, S′AB′C′, der have fælleds Spids B′ og deres

Grundflader SAC′, S′AC′ i een Plan, have samme Høide, altsaa forholde de sig som Grundfladerne SAC′, S′AC′, eller, da disse to Triangler have Vinklen C′AS og Siden AC′ tilfælleds, som AS : AS′. Altsaa har man de to Proportioner

$$\text{Pyr. } SABC : \text{Pyr. } SAB'C' = AB \times AC : AB' \times AC'$$
$$\text{Pyr. } SAB'C' : \text{Pyr. } S'AB'C' = AS : AS'.$$

Multipliceer Led for Led og reduceer, saa har man Pyr. SABC : Pyr. S′AB′C′ = AB × AC × AS : AB′ × AC′ × AS′.

Følg. Construeres paa de tre Kanter AB, AC, AS et tresidet Prisme, og et andet paa de tre Kanter AB′, AC′, AS′, da ere disse to Prismer det Tredobbelte af Pyramiderne SABC, S′AB′C′, fordi Grundfladerne og Høiderne ere de samme (№ 273); altsaa forholde to tresidede Prismer, der have en fælleds Treplansvinkel, sig som Producterne af denne Vinkels tre Kanter. Som disse Producter forholde sig ogsaa to Parallelepipeder construeerte paa de nævnte Kanter; thi disse Parallelepipeder ere det Dobbelte af de alt construeerte tresidede Prismer (№ 264, Følg.)

279— To ligedannede Pyramider forholde sig som Cubusserne af deres eensbeliggende Kanter eller som Cubusserne af deres Høider.

Thi to ligedannede Pyramider kunne stilles saaledes, at de have Fleerplansvinklen ved Spidsen S tilfælleds. Deres Grundflader ABCDE, *abcde* ere da parallele, thi af de eensbeliggende Siders Ligedannelse følger ∠ Sab = SAB, ∠ Sbc = SBC, altsaa Pl. abc ≠ Pl. ABC (№ 228). Lad SO være en Perpendiculær fældet fra Spidsen S ned paa Planen ABC, og o Punktet hvor den skjærer Planen abc, saa har man (№ 249) Fig. 213.
$SO : So = SA : Sa = AB : ab$, følgeligen

$$\tfrac{1}{3} SO : \tfrac{1}{3} So = AB : ab$$

endvidere, fordi Grundfladerne ere ligedannede Figurer,

$$ABCDE : abcde = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Multiplicier disse to Proportioner Led for Led, saa haves

$$ABCDE \times \tfrac{1}{3} SO : abcde \times \tfrac{1}{3} So = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3 \text{ eller}$$
$$= \overline{SO}^3 : \overline{So}^3$$

men $ABCDE \times \frac{1}{3} SO$ udtrykker Cubikindholdet af Pyramiden SABCDE, og $abcde \times \frac{1}{3} So$ Cubikindholdet af Pyramiden S*abcde*; altsaa forholde to ligedannede Pyramider sig som Cubusserne af deres eensbeliggende Kanter, eller som Cubusserne af deres Høider.

280— To hvilkesomhelst ligedannede Polyedre forholde sig som Cubusserne af deres eensbeliggende Kanter.

Fig.215. Thi to ligedannede Polyedre kunne deles i samme Antal, stykkeviis ligedannede, tresidede Pyramider (№ 253). De to ligedannede tresidede Pyramider APNM, *apnm* forholde sig som Cubusserne af de eensbeliggende Kanter AM, *am*, eller som Cubusserne af de eensbeliggende Kanter AB, *ab*, og samme Forhold finder Sted mellem hvilkesomhelst to andre eensbeliggende Pyramider; altsaa forholder Summen af alle Pyramiderne i det ene Polyeder, eller dette Polyeder selv, sig til det andet Polyeder, som Cubussen af en hvilkensomhelst Kant i det Første til Cubussen af den tilsvarende Kant i det Andet.

281— Til Oversigt fremstilles her, ved algebraiske Tegn, Hovedsætningerne om Polyedres Cubikindhold.

Lad, ved et Prisme, G være Grundfladen og H Høiden, saa er Prismets Cubikindhold $= G \times H$ eller GH.

Lad, ved en Pyramide, G være Grundfladen og H Høiden, saa er Pyramidens Cubikindhold $= G \times \frac{1}{3} H$ eller $H \times \frac{1}{3} G$ eller $\frac{1}{3} GH$.

Lad, ved en afkortet Pyramide med parallele Grundflader, H være Høiden, G og g Grundfladerne, altsaa $\sqrt{Gg}$ deres Mellemproportionalstørrelse, saa er den afkortede Pyramides Cubikindhold $= \frac{1}{3} H (G + g + \sqrt{Gg})$.

III. Cylindren — Keglen — Kuglen.

282— I. Det ved en Rectangel ACOM's Ombreining om sin ene, fastliggende, Side CO beskrevne Legem ABMN kaldes en Cylinder. Fig. 233.

Linierne AC, MO, der ere ligestore og perpendiculære paa CO, beskrive to congruente og parallele Cirkelflader ADE, MPQ: disse ere Cylindrens Grundflader, og Linien CO, der forener deres Centrer, Cylindrens Axe; Linien AM, Cylindrens Sidelinie, beskriver en convex krum Flade.*)

Ethvert Snit TYZ parallel med Cylindrens Grundflade ADE er en med denne congruent Cirkel, hvis Centrum X ligger i Axen; thi imedens Rectanglen ACOM dreier sig om Linien CO, beskriver Perpendiculæren TX, der er = AC, en Cirkel TYZ $\cong$ og $\neq$ ADE.

Ethvert ved en Plan gjennem Cylindrens Axe CO fremkommen Snit DPQE er en Rectangel, dobbelt saa stor som den beskrivende Rectangel AMOC.

Den definerede Cylinder kaldes, fordi Axen er perpendiculær paa Grundfladens Plan, en retstaaende Cylinder.

II. En Cylinder er skjævstaaende, naar Axen har en hvilkensomhelst anden end den perpendiculære Stilling mod Grundfladens Plan.

Dette Legem fremstaaer, naar en skraa Linie AM mod Planen ADB bevæger sig parallel med sin første Stilling og med sit Fig. 234.

---

*) Benævnelsen convex Flade bruges om enhver Flade, der ikke kunne skjæres af en ret Linie i flere end to Punkter; hvad enten det er en krum Flade, som Cylinderfladen, eller en Polyederflade, (sammensat af flere forskjellige Planer) eller og en Flade, der har deels krumme deels plane Dele. En convex krum Flade kunne have den Egenskab, at en ret Linie, draget i visse Retninger, ligger aldeles i Fladen, der isaafald kaldes en halvkrum Flade (f. Ex. Cylinderfladen) til Adskillelse fra en heelkrum Flade, i hvilken ikke, i nogensomhelst Retning, kunne drages en ret Linie.

ene Endepunkt i en Cirkellinie ADE i denne Plan. Det andet Endepunkt M beskriver en Cirkellinie MPQ ≅ og ≠ ADE; thi for det Første er MPQ en enkeltkrum Linie og dens Plan parallel med ADE, fordi Parallelerne AM, DP, EQ ꝛc. ere ligestore; og MPQ er en Cirkellinie congruent med ADE, thi betragtes den beskrivende Linie AM etsteds under Bevægelsen, f. Ex. i Stillingen DP, og man fra Grundfladens Centrum C drager, parallel med AM, Linien CO, der træffer Planen MPQ i Punktet O, saa er CO = DP, altsaa Figuren DCOP et Parallelogram, og følgeligen OP = CD. Altsaa er den øverste Grundflade MPQ en Cirkel congruent og parallel med den underste Grundflade, og det Samme er Tilfældet med ethvert Snit TYZ parallel med samme. Axen CO er Centrilinien for alle disse Cirkler.

III. En Cylinders Høide er en Perpendiculær mellem Grundfladernes Planer.

Altsaa er ved den retstaaende Cylinder Høiden lig Axen, men ved den skjævstaaende er Høiden mindre end Axen.

Fig. 235. 283— En Plan OABCD er mindre end enhver anden Flade PABCD med samme Contour ABCD.

For at en Flade kan være større end en anden, maae den første, idet mindste i nogle Retninger, have en større Udstrækning end den anden; og dersom det indtræffer at en Flade i enhver Retning har en mindre Udstrækning end en anden Flade, da er det indlysende, at hiin er mindre end denne. Nu er ved de to opgivne Flader, naar de i hvilkensomhelst Retning skjæres af en Plan BPD Overskjæringslinien BD, i den givne Plan, stedse en ret Linie og altsaa mindre end Overskjæringslinien BPD, i den anden Flade; altsaa er Planen OABCD mindre en anden Flade PABCD med samme Contour.

Fig. 236. 284— Enhver convex Flade OABCD er mindre en anden hvilkensomhelst Flade, der omfatter den første og har samme Contour ABCD.

Dersom Fladen OABCD ikke er mindre end enhver af de, samme omfattende Flader, saa lad den mindste af disse være PABCD, der i det høieste er ligestor med OABCD. Før gjennem hvilketsomhelst Punkt O en Plan, der berører Fladen OABCD uden at skjære den, saa træffer denne Plan sammen med Fladen PABCD og afskjærer af samme et Stykke, der er større end Planen med samme Contour (№ 283); altsaa naar til Resten af Fladen PABCD lægges denne Plan, saa haves en ny Flade, som omfatter Fladen OABCD og som er mindre end PABCD. Men den sidste er, ifølge Hypothesen, den mindste af alle; altsaa kunne denne Hypothes ei finde Sted, og følgeligen er den convexe Flade OABCD mindre end enhver samme omfattende Flade, med samme Contour ABCD.

Anm. Ved et fuldkommen lignende Raisonnement bevises, at:

1º En convex Flade begrændset af to Contourer ABC, DEF er mindre end en anden hvilkensomhelst Flade, der omfatter den første og har samme Contourer. Fig. 237.

2º En convex Flade AB er mindre end en anden Flade MN, af hvilken den aldeles indesluttes, hvad enten de have Punkter, Linier, Planer tilfælleds, eller aldeles intet Punkt tilfælleds. Fig. 238.

Thi dersom man antog, at MN var den mindste af de Flader, der indesluttte AB, og at den i det Høieste var liig AB, saa drag en, denne berørende, Plan CD; man har da, fordi CD < CMD, en anden, AB indesluttende, Flade CDN < MN, hvilket strider imod Hypothesen, at MN er den mindste af alle. Altsaa er den convexe Flade AB mindre end enhver, samme indesluttende Flade.

285— 1. Naar man i Cirklen ACE, der tjener en Cylinder til Grundflade, indskriver en Polygon ABCDE, og fra alle Vinkelspidserne A, B, C, rc. drager Linier AF, BG, CH, rc. parallele med og liig Cylindrens Axe OP, da siges det derved Fig. 239.

fremstaaende Prisme ABCDEF at være indskreven i Cylindren, eller Cylinderen at være omskreven om Prismet.

Det er indlysende at Prismets Kanter AF, BG, CH ꝛc., der ere parallele med Cylindrens Axe, ligge aldeles i Cylindrens Overflade.

II. Ligedan naar man danner et Prisme, hvis Grundflade,
Fig.240. Polygonen ABCD, er omskrevet om en Cylinders Grundflade, og hvis Kanter AF, BG, CH ꝛc. ere parallele med og liig Cylindrens Axe, da siges dette Prisme ABCDF at være omskreven om Cylindren, eller Cylindren at være indskreven i Prismet.

Drages fra Berøringspunkterne M, N, ꝛc. af den om Cylindrens Grundflade omskrevne Polygons Sider AB, BC, ꝛc., Linierne MV, NX, ꝛc. parallele med Axen, saa indsees at disse Linier ligge saavel i Prismets som Cylindrens Overflade, og ere altsaa disse to convexe Fladers Berøringslinier.

286. En retstaaende Cylinders krumme Flade er større end det indskrevne og mindre end det omskrevne Prismes, af Grundfladernes Contourer begrændsede, convexe Flade.

Fig.239. Thi Cylindrens krumme Flade og den, af Contourerne ABCDE, FGHIK begrændsede, convexe Flade af det indskrevne Prisme ABCDEF kunne ansees at have samme Længde, fordi ethvert Snit, i den ene eller den anden, parallel med AF er liig AF, og den første Flades Bredde, Peripherien af Cylindrens Grundflade, er større end den anden Flades Bredde, Perimeteren af den indskrevne Polygon ABCDE, altsaa, da Længden er eens, men Bredden større ved Cylinderfladen end ved det indskrevne Prismes convexe Flade, saa er den første Flade større end den anden.

Fig.240. Ved et fuldkommen lignende Raisonnement bevises, at Cylindrens krumme Flade er mindre end den convexe Flade af ethvert omskrevet Prisme ABCDF.

287— En retstaaende Cylinders krumme Flade er liig Productet af Grundfladens Peripherie og Sidelinien.

Lad CA være Grundfladens Radius, og H Høiden eller Sidelinien af den retstaaende Cylindren ADE, saa er denne Cylinders krumme Flade = Periph. CA $\times$ H. Thi antag at dette Product kunne være Maalet for den krumme Flade af en mindre retstaaende Cylinder, hvis Grundflades Radius er CB $<$ CA, og hvis Høide er H. Beskriv om Cirklen CB en regulær Polygon FGH...; hvis Sider ikke træffe Peripherien CA (№ 176), og construeer, paa denne Polygon FGH... som Grundflade, et retstaaende Prisme FGHP, saa er dette Prismes, af Contourerne FGN, PQX begrændsede, convexe Flade = Perim. FGN $\times$ H (№ 261, 2°). Nu er Perim. FGN $<$ Periph. CA, altsaa skulde dette Prismes convexe Flade være $<$ Periph. CA $\times$ H, som, ifølge Hypothesen, er Maalet for den krumme Flade af den i Prismet indskrevne Cylinder; men det er netop omvendt (№ 286), altsaa kunne Productet af en Cylinders Grundflades Peripherie og Sidelinien ikke være Maalet for den krumme Flade af en mindre Cylinder. Fig. 241.

Man beviser paa lignende Maade, at dette Product kan heller ikke være Maalet for den krumme Flade af en større Cylinder; altsaa er en retstaaende Cylinders krumme Flade liig Productet af dens Grundflades Peripherie og dens Sidelinie.

Anm. Lad en retstaaende Cylinders Sidelinie eller Høide være H, dens Grundflades Radius R, altsaa Peripherien $P = 2\pi R$ (№ 177, II), saa er Cylindrens krumme Flade $= PH = 2\pi RH$, og hver Grundflade $= \frac{1}{2} PR = \pi R^2$ (№ 212), altsaa Cylindrens hele Overflade $= P(H + R) = 2\pi R(H + R)$.

288— En Cylinders Cubikindhold er liig Productet af Grundfladen og Høiden.

Lad CA være Grundfladens Radius, og H Høiden af Cylindren ADE, saa er denne Cylinders Cubikindhold = Cirk. CA $\times$ H. Thi antag at dette Product kunne være Maalet for en Fig. 241.

mindre Cylinder med samme Axe CO, samme Høide H, og hvis Grundflades Radius er CB < CA. Beskriv om Cirklen CB en regulær Polygon FGH..., hvis Sider ikke træffe Peripherien CA (Nº 176), og lad Polygonen FGH... være Grundfladen for et om den sidste Cylinder omskrevent Prisme FGHP, der altsaa har samme Høide H, saa er dette Prismes Cubikindhold = Polyg. FGH... × H (Nº 271). Nu er Polyg. FGH... < Cirk. CA, altsaa skulde Prismets Cubikindhold være < Cirk. CA × H, som, ifølge Hypothesen, er Cubikindholdet af den i Prismet indskrevne Cylinder; men det er netop omvendt, altsaa kunne Productet af en Cylinders Grundflade og Høide ikke være Maalet for en mindre Cylinder.

Man beviser paa lignende Maade, at dette Product kunne heller ikke være Maalet for en større Cylinder, altsaa er en Cylinders Cubikindhold liig Productet af dens Grundflade og dens Høide.

Anm. Dette Theorem finde Sted saavel ved en retstaaende som skjævstaaende Cylinder; thi Raisonnementet fordrer ikke, at Cylindrens Axe CO og de med samme parallele Kanter af Prismet ere perpendiculære paa Grundfladens Plan.

Lad en hvilkensomhelst Cylinders Høide være H, dens Grundflade C, dennes Radius R, altsaa $C = \pi R^2$, saa er denne Cylynders Cubikindhold $= CH = \pi R^2 H$.

Følg. I. Cylindre af samme Høide forholde sig som deres Grundflader, eller som Qvadraterne af deres Grundfladers Radier eller Diametre (Nº 212, Følg.)

II. Cylindre med ligestore Grundflader forholde sig som deres Høider.

Fig. 242. 289— I. Det ved en retvinklet Triangel ACS's Omdreining om sin ene, fastliggende, Cathete SC beskrevne Legem SADBE kaldes en Kegle.

Den anden Cathete AC beskriver en Cirkel ADBE: denne er Keglens Grundflade, Punktet S Keglens Spids, Linien SC,

der forener Spidsen og Grundfladens Centrum, Keglens Axe; Linien SA, Keglens Sidelinie beskriver en convex krum Flade.

Ethvert Snit *adbe* parallel med Keglens Grundflade ADBE er en Cirkel, hvis Centrum *c* ligger i Axen. Da $ac \neq AC$, saa er $\triangle Sac \sim SAC$, og man har

$$ca : CA = Sa : SA = Sc : SC$$

altsaa ved Cirklerne hvis Radier ere *ca* og CA

$$(\text{N}^\circ\ 177)\ \text{Periph.}\ ca : \text{Periph.}\ CA = ca : CA = Sa : SA = Sc : SC$$

$$(\text{N}^\circ\ 212)\ \text{Cirk.}\ ca : \text{Cirk.}\ CA = \overline{ca}^2 : \overline{CA}^2 = \overline{Sa}^2 : \overline{SA}^2 = \overline{Sc}^2 : \overline{SC}^2$$

altsaa: Snittene forholde sig som Qvadraterne af deres Afstande fra Keglens Spids.

Ethvert Snit SDE gjennem Axen er en ligebenet Triangel, dobbelt saa stor som den beskrivende retvinklede Triangel SCD.

Den definerede Kegle kaldes, fordi Axen er perpendiculær paa Grundfladens Plan, en retstaaende Kegle.

II. En Kegle er skjævstaaende, naar Axen har en hvilkensomhelst anden end den perpendiculære Stilling mod Grundfladens Plan.

Dette Legem fremstaaer, naar en ret Linie SA, idet den dreier sig om et Punkt S, stedse berører Peripherien af en Cirkel ADB, hvis Plan ikke gaaer gjennem Punktet S. Fig.213.

III. En Kegles Høide er en Perpendiculær fældet fra Spidsen ned paa Grundfladens Plan.

Altsaa er ved den retstaaende Kegle Høiden liig Axen, men ved den skjævstaaende er Høiden SO mindre end Axen SC. Fig.213.

IV. Naar man fra Keglen SADBE, ved et Snit parallel med Grundfladen ADBE, afskjærer Keglen S*adbe*, da kaldes det tilbageblevne Legem ADBE*adbe* en parallel afkortet Kegle. Fig.212.

En retstaaende parallel afkortet Kegle fremstaaer, naar et Trapezium AC*ca*, hvor Vinklerne C og *c* ere rette, dreier sig

om Siden *cC*. Linien *cC* er dette Legems Axe, Cirklerne ADB, *adb* dets Grundflader, og *aA* dets Sidelinie.

Fig.244. V. Naar i Cirklen ACE, der tjener en Kegle til Grundflade, er indskrevet en Polygon ABCDE, og denne Polygon er Grundflade for en Pyramide, der har samme Spids S som Keglen, da siges denne Pyramide SABCDE at være indskreven i Keglen, eller Keglen at være omskreven om Pyramiden.

Det er indlysende, at Pyramidens Kanter SA, SB, SC, 2c. ligge aldeles i Keglens Overflade.

Fig.245. VI. Ligedan naar en Pyramide har samme Spids S som en Kegle, og dens Grundflade, Polygonen ABCD, er omskreven om Keglens Grundflade, da siges denne Pyramide SABCD at være omskreven om Keglen, eller Keglen at være indskreven i Pyramiden.

Linierne SM, SN, 2c., der forener Spidsen S med Berøringspunkterne M, N, 2c. af den om Keglens Grundflade omskrevne Polygons Sider AB, BC, 2c., ligge saavel i Pyramidens som Keglens Overflade, og ere altsaa disse to convexe Fladers Berøringslinier.

290. **En retstaaende Kegles krumme Flade er større end den indskrevne og mindre end den omskrevne Pyramides, af Grundfladens Contour begrændsede, convexe Flade.**

Fig.244. Thi forestille vi os, at den givne Kegle SACE og en anden saadan Kegle ere stillede med Grundfladerne mod hinanden, ligeledes den indskrevne Pyramide SABCDE og en anden saadan Pyramide, saa er den convexe Flade der begrændser de to Pyramider, aldeles indesluttet af den convexe Flade, der begrændser de to Kegler; altsaa er den anden Flade større end den første (Nº. 284, Anm. 2º), og følgeligen er den givne Kegles krumme Flade større end den indskrevne Pyramides, af Contouren ABCDE begrændsede convexe Flade SABCDE.

Paa samme Maade bevises, at en Kegles krumme Flade SMNOP er mindre end den convexe Flade SABCD af den omskrevne Pyramide. Fig. 245.

291— En retstaaende Kegles krumme Flade er liig Productet af Grundfladens Peripherie og den halve Sidelinie.

Lad CA være Grundfladens Radius og SA Sidelinien af den givne retstaaende Kegle SAD, saa er denne Kegles krumme Flade = Periph. CA $\times \frac{1}{2}$ SA. Thi antag at dette Product kunne være Maalet for den krumme Flade af en mindre retstaaende Kegle SBE, hvis Grundflades Radius er CB $<$ CA, og hvis Spids er i S. Beskriv om Cirklen CB en regulær Polygon FGH..., hvis Sider ikke træffe Peripherien CA (No. 176), og lad denne Polygon FGH... være Grundfladen for en Pyramide SFGHN med Spidsen i S. Denne Pyramide er regulær, forbi Axen SC er perpendiculær paa Grundfladens Plan, og den er omskreven om Keglen SBE. Fæld fra Pyramidens Spids ned paa een af dens Grundflades Sider, f. Ex. FG, Perpendiculæren SB, saa er Pyramidens convexe Flade SFGHN = Perim. FGHN $\times \frac{1}{2}$ SB (No. 261, 1°), men Perim. FGHN $<$ Periph. CA, og SB $<$ SA, altsaa Pyramidens convexe Flade $<$ Periph. CA $\times \frac{1}{2}$ SA, som, ifølge Hypothesen, er Maalet for den krumme Flade af den i Pyramiden indskrevne Kegle SBE. Men den første Flade er derimod større end den anden (No. 290), altsaa er det umuligt, at Productet af Grundfladens Peripherie og den halve Sidelinie af en Kegle kan være Maalet for den krumme Flade af en mindre Kegle. Fig. 246.

Man beviser paa lignende Maade, at dette Product kan heller ikke være Maalet for den krumme Flade af en større Kegle; altsaa er en retstaaende Kegles krumme Flade liig Productet af dens Grundflades Peripherie og dens halve Sidelinie.

Anm. Lad en retstaaende Kegles Sidelinie være S, dens Grundflades Radius R, altsaa Peripherien P $= 2\pi$R, saa er

Keglens krumme Flade $= P \times \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} PS = \pi RS$, og Grundfladen $= \pi R^2$, altsaa Keglens hele Overflade $= \pi R(S + R)$.

292— En retstaaende parallel afkortet Kegles krumme
Fig. 247. Flade er liig Productet af Sidelinien Aa og den halve Sum af Grundfladernes Peripherier ABD, abd.

I Planen SBA, lagt gjennem Axen SC, drag, $\perp SA$, Linien $AE =$ Periph. CA, drag SE, dernæst $ae \mathrel{\#} AE$.

Af $\triangle SAE \sim Sae$ og $\triangle SAC \sim Sac$ følger

$$AE : ae = SA : Sa \text{ og } SA : Sa = CA : ca$$

altsaa $AE : ae = CA : ca =$ Periph. CA : Periph. ca

men $AE =$ Periph. CA, altsaa $ae =$ Periph. ca. Nu er $\triangle SAE = AE \times \frac{1}{2} SA =$ Periph. $CA \times \frac{1}{2} SA$, som er Maalet for den krumme Flade af Keglen $SABD$ (№ 291), ligeledes $\triangle Sae =$ den krumme Flade af Keglen $Sabd$, altsaa Trapez. $AaeE =$ den krumme Flade af den afkortede Kegle $ABDabd$. Men (№ 191) Trapez. $AaeE = Aa \times \frac{AE + ae}{2} = Aa \times \frac{\text{Periph. } CA + \text{Periph. } ca}{2}$, altsaa er den retstaaende parallel afkortede Kegles krumme Flade liig Productet af Sidelinien og den halve Sum af Grundfladernes Peripherier.

Følg. Drag fra a', Midten af Aa, Linien $a'e' \mathrel{\#} AE$, og læg gjennem a' Planen $a'b'd' \mathrel{\#} ABD$, saa bevises, som ovenfor, at $a'e' =$ Periph. $c'a'$. Men Trapez. $AaeE = Aa \times a'e' = Aa \times$ Periph. $c'a'$, altsaa kan man og sige: en retstaaende parallel afkortet Kegles krumme Flade er liig Productet af Sidelinien og Peripherien af et Snit i ligestor Afstand fra begge Grundfladerne.

Anm. Naar en ret Linie Aa, der ligger heelt til samme Side af en anden Cc, i samme Plan, dreier sig om denne Linie Cc, saa er den beskrevne Flade $= Aa \times \frac{\text{Periph. } CA + \text{Periph. } ca}{2} = Aa \times$ Periph. $c'a'$: Linierne AC, ac, $a'c'$ ere Perpendiculærer fældede fra Enderne A, a og Midten a' af Linien Aa ned paa Axen Cc.

Thi forlængres Linierne Aa og Cc indtil de støde sammen i S, saa indsees, at Fladen beskrevet af Linien Aa er den krumme Flade af en affortet Kegle, hvis Grundfladers Radier ere CA og ca: den hele Kegle har Spidsen i S; altsaa har denne Flade det angivne Maal.

Man har stedse dette Maal for den beskrevne Flade, endog naar Punktet a falder i S, hvilket giver en heel Kegle; eller og naar Linien Aa er parallel med Axen Cc, hvilket giver en Cylinder: i første Tilfælde er $ca = o$, i andet Tilfælde $ca =$ CA $= c'a'$.

293. En Kegles Cubikindhold er liig en Trediedeel af Productet af Grundfladen og Høiden.

Lad CA være Grundfladens Radius og H Høiden af Keglen SAD, saa er denne Kegles Cubikindhold = Cirk. CA $\times \frac{1}{3}$ H. Fig. 246.
Thi antag at dette Product kunne være Maalet for en mindre Kegle SBE med samme Axe SC, samme Høide H, og hvis Grundflades Radius er CB $<$ CA. Beskriv om Cirklen CB en regulær Polygon FGH..., hvis Sider ikke træffe Peripherien CA (N° 176), og lad denne Polygon FGH... være Grundfladen for en Pyramide SFGHN med Spidsen i S, og hvis Høide altsaa er H; saa er denne Pyramide omskreven om Keglen SBE og dens Cubikindhold = Polyg. FGHN $\times \frac{1}{3}$ H (N° 274), men Polyg. FGHN $<$ Cirk. CA, altsaa Pyramidens Cubikindhold $<$ Cirk. CA $\times \frac{1}{3}$ H, som, ifølge Hypothesen, er Maalet for den i Pyramiden indskrevne Kegle SBE. Men Pyramiden er derimod større end den indskrevne Kegle, altsaa er det umuligt, at Productet af en Kegles Grundflade og en Trediedeel af dens Høide kan være Maalet for en mindre Kegle.

Man beviser paa lignende Maade, at dette Product kan heller ikke være Maalet for en større Kegle; altsaa er en Kegles Cubikindhold liig en Trediedeel af Productet af dens Grundflade og dens Høide.

Anm. Dette Theorem finder Sted saavel ved en retstaaende som skjævstaaende Kegle; thi Raisonnementet fordrer ikke, at Keglens Axe SC er liig dens Høide.

Lad H være Høiden af en hvilkensomhelst Kegle, R Radius af dens Grundflade C, altsaa $C = \pi R^2$, saa er denne Kegles Cubikindhold $= \frac{1}{3} CH = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

Følg. I. En Kegle er en Trediedeel af en Cylinder med samme Grundflade og samme Høide.

II. Kegler af samme Høide forholde sig som deres Grundflader, eller som Qvadraterne af deres Grundfladers Radier eller Diametre.

III. Kegler med ligestore Grundflader forholde sig som deres Høider.

Fig. 248. **294.** Cubikindholdet af en retstaaende parallel afkortet Kegle $ABDabd$, hvis Grundfladers Radier ere CA og ca, og hvis Høide er cC, er $= \frac{1}{3}\pi \cdot Cc(\overline{CA}^2 + \overline{ca}^2 + CA \times ca)$.

Lad Keglen SABD og den tresidede Pyramide S′A′B′D′ have ligestore Grundflader ABD, A′B′D′, som antages at ligge i een Plan, og samme Høide SC, altsaa deres Spidser S, S′ i samme Afstand fra deres Grundfladers Plan, saa frembringer Forlængringen af Planen abd, i Pyramiden, et Snit $a'b'd' =$ Cirk. ca. Thi Cirk. CA : Cirk. $ca = \overline{CA}^2 : \overline{ca}^2 = \overline{SC}^2 : \overline{sc}^2$ (№ 289, I), og Trianglerne A′B′D′, $a'b'd'$ forholde sig som Qvadraterne af samme Afstande SC, sc (№ 249), altsaa

$$\text{Cirk. CA : Cirk. } ca = \triangle A'B'D' : a'b'd',$$

men $\triangle A'B'D' =$ Cirk. CA, altsaa $\triangle a'b'd' =$ Cirk. ca.

Nu er (№ 293) Keglen SABD = Cirk. CA $\times \frac{1}{3}$ SC, og (№ 274) Pyramiden S′A′B′D′ = △ A′B′D′ $\times \frac{1}{3}$ SC = Cirk. CA $\times \frac{1}{3}$ SC, altsaa Keglen SABD = Pyr. S′A′B′D′; ligeledes Keglen $Sabd$ = Pyr. $S'a'b'd'$, altsaa den afkortede Kegle $ABDabd$ = den afk. Pyr. $A'B'D'a'b'd'$. Men Grundfladen A′B′D′ =

Cirk. CA $= \pi \times \overline{CA}^2$, Grundfladen $a'b'd' =$ Cirk. $ca = \pi \times \overline{ca}^2$, og Mellemproportionalstørrelsen til $\pi \times \overline{CA}^2$ og $\pi \times \overline{ca}^2$ er $\pi \times CA \times ca$, altsaa (№ 276, 284) den affortede Pyramide $A'B'D'a'b'd'$ eller den affortede Kegle $ABDabd = \frac{1}{3} Cc (\pi \times \overline{CA}^2 + \pi \times \overline{ca}^2 + \pi \times CA \times ca) = \frac{1}{3} \pi \times Cc (\overline{CA}^2 + \overline{ca}^2 + CA \times ca)$.

Anm. Det indsees let, at samme Theorem finder Sted ved den skjævstaaende parallel affortede Kegle.

Lad R og r være Grundfladernes Radier, og H Høiden af en hvilkensomhelst parallel affortet Kegle, saa er dette Legems Cubikindhold $= \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr)$.

295— To Cylindre eller to Kegler ere ligedannede, naar de fremstaae ved Omdreining af ligedannede Figurer.

Ved to ligedannede Cylindre ABDM, *abdm*, fremstaaede ved Omdreining af de ligedannede Rectangler ACOM, *acom*, har man Fig. 233.

$$\text{Periph. } CA : \text{Periph. } ca = CA : ca = AM : am$$
$$\text{Cirk. } CA : \text{Cirk. } ca = \overline{CA}^2 : \overline{ca}^2 = \overline{AM}^2 : \overline{am}^2$$

d. e. Grundfladernes Peripherier forholde sig som Sidelinierne og deres Fladeindhold som Qvadraterne af disse Linier.

Ved to ligedannede Kegler SABD, S*abd*, fremstaaede ved Omdreining af de ligedannede retvinklede Triangler SCA, S*ca*, har man Fig. 242.

$$\text{Periph. } CA : \text{Periph. } ca = CA : ca = SA : Sa = SC : Sc$$
$$\text{Cirk. } CA : \text{Cirk. } ca = \overline{CA}^2 : \overline{ca}^2 = \overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2 = \overline{SC}^2 : \overline{Sc}^2$$

d. e. Grundfladernes Peripherier forholde sig som Sidelinierne eller som Høiderne, og deres Fladeindhold som Qvadraterne af disse Linier.

296— Ligedannede Cylindres Overflader forholde sig som Qvadraterne af deres Grundfladers Radier eller som Qvadraterne af deres Sidelinier, og deres Cubikindhold som Cubusserne af disse Linier.

1° Naar de to Proportioner

Fig. 283. $$\text{Periph. CA} : \text{Periph. } ca = \text{AM} : am \quad (\text{N}^\circ\, 295)$$
$$\text{AM} : am = \text{AM} : am$$

multipliceres Led for Led, saa har man

$$\text{Periph. CA} \times \text{AM} : \text{Periph. } ca \times am = \overline{\text{AM}}^2 : \overline{am}^2;$$

men Periph. CA $\times$ AM er Maalet for den krumme Flade af Cylindren ABDM, og Periph. $ca \times am$ Maalet for den krumme Flade af Cylindren *abdm* (N° 287), altsaa forholde disse ligedannede Cylindres krumme Flader sig som $\overline{\text{AM}}^2 : \overline{am}^2$ eller som $\overline{\text{CA}}^2 : \overline{ca}^2$. Som disse Liniers Qvadrater forholde sig ogsaa Cylindrenes Grundflader, altsaa forholder Summen af den krumme Flade og Grundfladerne af den ene Cylinder, eller denne Cylinders Overflade sig til den anden Cylinders Overflade, som Qvadratet af Sidelinien, eller Qvadratet af Grundfladens Radius, af den første Cylinder til Qvadratet af den tilsvarende Linie af den anden Cylinder.

2° Naar de to Proportioner

$$\text{Cirk. CA} : \text{Cirk. } ca = \overline{\text{AM}}^2 : \overline{am}^2$$
$$\text{AM} : am = \text{AM} : am$$

multipliceres Led for Led, saa har man

$$\text{Cirk. CA} \times \text{AM} : \text{Cirk. } ca \times am = \overline{\text{AM}}^3 : \overline{am}^3 \text{ eller}$$
$$= \overline{\text{CA}}^3 : \overline{ca}^3$$

men Cirk. CA $\times$ AM er Cubikindholdet af Cylindren ABDM, og Cirk. $ca \times am$ Cubikindholdet af Cylindren *abdm* (N° 288), altsaa forholde de to ligedannede Cylindres Cubikindhold sig som Cubusserne af deres Sidelinier, eller som Cubusserne af deres Grundfladers Radier.

297— Ligedannede Keglers Overflader forholde sig som Qvadraterne af deres Grundfladers Radier, eller som Qvadraterne af deres Sidelinier, og deres Cubikindhold som Cubusserne af disse Linier.

1° Naar de to Proportioner

Periph. CA : Periph. $ca = SA : Sa$ (№ 295) Fig. 242.

$\frac{1}{2} SA : \frac{1}{2} Sa = SA : Sa$

multipliceres Led for Led, saa har man

Periph. CA $\times \frac{1}{2} SA$: Periph. $ca \times \frac{1}{2} Sa = \overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2$;

men Periph. CA $\times \frac{1}{2}$ SA er Maalet for den krumme Flade af Keglen SABD, og Periph. $ca \times \frac{1}{2} Sa$ Maalet for den krumme Flade af Keglen *Sabd* (№ 291), altsaa forholde disse ligedannede Keglers krumme Flader sig som $\overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2$ eller som $\overline{CA}^2 : \overline{ca}^2$. Som disse Liniers Qvadrater forholde sig ogsaa Keglernes Grundflader, altsaa forholder Summen af den krumme Flade og Grundfladen af den første Kegle, eller denne Kegles Overflade sig til den anden Kegles Overflade, som Qvadratet af Sidelinien, eller Qvadratet af Grundfladens Radius, af den første Kegle til Qvadratet af den tilsvarende Linie af den anden Kegle.

2° Naar de to Proportioner

Cirk. CA : Cirk. $ca = \overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2$

$\frac{1}{3} SA : \frac{1}{3} Sa = SA : Sa$

multipliceres Led for Led, saa har man

Cirk. CA $\times \frac{1}{3} SA$: Cirk. $ca \times \frac{1}{3} Sa = \overline{SA}^3 : \overline{Sa}^3$ eller

$= \overline{CA}^3 : \overline{ca}^3$;

men Cirk. CA $\times \frac{1}{3}$ SA er Cubikindholdet af Keglen SABD, og Cirk. $ca \times \frac{1}{3} Sa$ Cubikindholdet af Keglen *Sabd* (№ 293), altsaa forholde de to ligedannede Keglers Cubikindhold sig som Cubusserne af deres Sidelinier, eller som Cubusserne af deres Grundfladers Radier.

298. I. En Kugle er et Legem begrændset af en eneste krum Flade, i hvilken alle Punkter ligge ligelangt fra eet Punkt, som kaldes Kuglens Centrum.

En Kugle fremstaaer naar en Halvcirkel DAE dreier sig om Fig. 249. Diameteren DE; thi alle Punkter i Fladen beskreven af Curven DAE ligge ligelangt fra Centret C.

II. En Kugles Radius er en ret Linie draget fra Centret til et hvilketsomhelst Punkt i Kuglens Overflade; dens Diameter eller Axe en gjennem Centret gaaende ret Linie, hvis Endepunkter ligge i Kuglens Overflade.

Alle Radier i samme Kugle ere ligestore; alle Diametre ligestore og dobbelt saa store som Radius.

299. Naar en Kugle skjæres af en Plan, da er Snittet en Cirkel.

Fig. 250. Lad AMBN være Snittet, fremkommet idet en Plan skjærer Kuglen, hvis Centrum er C. Drag, fra Punktet C, Linien CO ⊥ Pl. AMBN, og, til forskjellige Punkter M, B, N i Curven AMBN, der beskrændser dette Snit, Linierne CM, CB, CN.

Da de skraa Linier CM, CB, CN, som Radier af Kuglen, ere ligestore, saa vige de ligemeget ud fra Perpendiculæren CO, d. v. s. Linierne OM, OB, ON ere ligestore (№ 220), altsaa er Snittet AMBN en Cirkel, hvis Centrum er O.

Anm. Naar Snittet gaaer igjennem Kuglens Centrum, da kaldes det en Storcirkel, i ethvert andet Tilfælde en mindre Cirkel.

Følg. I. En Storcirkel har samme Radius som Kuglen; altsaa ere alle Storcirkler i samme Kugle congruente.

II. To Storcirkler skjære hinanden i to congruente Dele; thi deres Overskjæringslinie gaaer igjennem Centret og er altsaa en Diameter.

III. Enhver Storcirkel deler Kuglen og dens Overflade i to congruente Dele; thi bringes de to Halvkugler med deres plane Grundflader til Dækning, og saaledes at de ere convexe mod samme Side, da dække ogsaa deres krumme Flader hinanden, fordi der, i modsat Fald, vare i Kuglens Overflade nogle Punkter nærmere Centret end andre.

IV. En ret Linie draget gjennem Kuglens og en mindre Cirkels Centrer er perpendiculær paa denne Cirkels Plan.

V. Jo længere en mindre Cirkel ligger fra Kuglens Centrum desto mindre er den; thi jo større Afstanden CO er, desto mindre er Chorden AB, som er Diameteren i den mindre Cirkel AMBN.

VI. Gjennem to givne Punkter i Kuglens Overflade kunde stedse føres ēn Storcirkelbue; thi de to givne Punkter og Kuglens Centrum ere tre Punkter, der bestemme en Plans Beliggenhed. Dersom de to givne Punkter ere Enderne af en Diameter, altsaa disse to Punkter og Kuglens Centrum i een ret Linie, da kunne uendelig mange Storcirkler føres gjennem de to givne Punkter.

300— En Cirkels Pol er et Punkt i Kuglens Overflade, der ligger ligelangt fra alle Punkter i denne Cirkels Peripherie.

301— Drages, perpendiculær paa en Storcirkels Plan, Diameteren DE, saa ere dens Endepunkter D, E Polerne til denne Storcirkel AMB og til enhver mindre Cirkel FPG parallel med samme. Fig. 249

1º Da Linien DC ⊥ Pl. AMB, saa er DC ⊥ Linierne CA, CM, CN 2c. dragne i denne Plan gjennem Sammenstødningspunktet C, altsaa er enhver af Buerne DA, DM, DN, 2c. en Fjerdedeel af Peripherien, og det Samme er Tilfældet med Buerne EA, EM, EN, 2c.; altsaa ligger Punktet D, saavelsom E, ligelangt fra alle Punkter i Peripherien AMB, og derfor ere D og E denne Storcirkels Poler.

2º Naar Radius DC ⊥ Pl. AMB, og Pl. FPG ≠ Pl. AMB, saa er DC ⊥ Pl. FPG, altsaa gaaer DC gjennem Centret O af Cirklen FPG (Nº 299, IV), og, dersom fra D til Punkter i denne Cirkels Peripherie drages rette Linier DF, DP, DQ, 2c., da vige disse skraa Linier ligemeget ud fra Perpendiculæren DO og ere ligestore (Nº 220). Men naar Chorderne DF, DP, DQ, 2c. ere ligestore, da ere ogsaa Buerne DF, DP, DQ, 2c. ligestore, altsaa er Punktet D en Pol til den mindre Cirkel FPG, og, af samme Grund, er Punktet E dens anden Pol.

Følg. I. Enhver Bue DM draget fra et Punkt i en Storcirkelbue AMB til dens Pol er en Fjerdedeel af Peripherien eller en Qvadrant. Denne Qvadrant og Buen AM, eller deres Planer, danne en ret Vinkel; thi da Linien DC ⊥ Pl. AMC, saa er Pl. CDM ⊥ Pl. AMC (№ 233), altsaa danne disse Planer, eller Buerne AM, MD en ret Vinkel, eller ere perpendiculære paa hinanden.

II. Polen til en given Storcirkelbue AM findes, ved at drage, perpendiculær paa samme, en Storcirkelbue MD = en Qvadrant; eller ved, fra de to Punkter A og M, at drage, perpendiculær paa AM, Buerne AD, MD, der støde sammen i Punktet D, som er een af Polerne til den givne Bue AM.

III. Omvendt naar Afstanden mellem Punktet D og hvert især af Punkterne A og M er en Qvadrant, da er Punktet D en Pol til Buen AM, og Vinklerne DAM, AMD rette.

Thi drages Radierne CA, CD, CM, saa, fordi Vinklerne ACD, MCD ere rette, er Linien CD perpendiculær paa Linierne CA, CM, altsaa CD ⊥ Pl. ACM; følgeligen er Punktet D en Pol til Buen AM, og Vinklerne DAM, AMD rette.

Anm. Ved Hjelp af Polerne kan man, paa en Kugleflade drage Buer med samme Lethed som paa en Plan. Naar man f. Ex. dreier Buen DF, eller enhver anden Linie med samme Endepunkter, om Punktet D, da beskriver det andet Endepunkt Peripherien af en mindre Cirkel; og naar man dreier Qvadranten DFA om Punktet D, da beskriver Endepunktet A en Storcirkelbue AMB.

Dersom en Bue AM skulde forlængres, eller en Bue drages gjennem to givne Punkter A og M, saa bestemmes først Polen D ved Overskjæring af to Buer, beskrevne fra Punkterne A og M som Poler, og dernæst fra Punktet D, som Pol, Buen AM og dens Forlængring.

Skulde endelig fra et givet Punkt P fældes en Bue perpendiculær paa Buen AM, saa forlængres denne saalangt, indtil S,

at Storcirkelbuen PS er en Qvadrant; og fra S som Pol beskrives, gjennem det givne Punkt, Buen PM, hvilken er den forlangte Bue perpendiculær paa AM.

302— En Plan berører, tangerer en Kugleflade, naar den kun har eet Punkt tilfælleds med samme.

303— **En Plan perpendiculær paa Enden af en Radius tangerer Kuglen.**

Lad TDT' være en Plan perpendiculær paa Enden D af en Radius CD; drag fra Kuglens Centrum til et hvilketsomhelst andet Punkt V i Planen TDT', Linien CV, saa er den skraa Linie CV større end Perpendiculæren CD, Kuglens Radius, altsaa er Punktet V udenfor Kuglen, og det Samme er Tilfældet med ethvert andet Punkt end D i Planen TDT'; altsaa tangerer denne Plan Kuglen i Punktet D. Fig. 249

Følg. Naar Tangenten DT dreier sig tilligemed Halvcirklen DAE om Diameteren DE, da beskriver den en Plan TDT', der tangerer Kuglen i Punktet D.

Anm. Man beviser ligedan, at to Kugler have ikkun eet Punkt tilfælleds, d. e. at de berøre hinanden, naar Afstanden mellem deres Centrer er liig Summen eller Differensen af deres Radier: Berøringspunktet ligger i Centrilinien.

304— I. En Zone er en mellem to parallele Planer liggende Deel af en Kugleflade. Den ene Plan kunne tangere Kuglen, og isaafald har Zonen DHLI kun een Contour HLI, Peripherien af Cirklen, som fremkommer idet den anden Plan skiærer Kuglen; men naar de to parallele Planer HLI, FQG begge skiære Kuglen, da har Zonen HLIGQF to Contourer HLI, FQG. Fig. 249.

II. Et Kuglesegment er et Kuglestykke mellem to parallele Planer. Den ene Plan kunne tangere Kuglen, og isaafald er det ved den anden Plan fremkomne Snit, Cirklen HLI, Grundfladen af Kuglesegmentet DHLI; men naar de to parallele Pla-

ner HLI, FQG begge skiære Kuglen, da har Kuglesegmentet HLIFQG to Grundflader, Cirklerne HLI, FQG.

III. En Zones eller et Kuglesegments Høide er Afstanden mellem de to parallele Planer, mellem hvilke Zonen ligger.

IV. Imedens Halvcirklen DAE beskriver, idet den dreier sig om Diameteren DE, en Kugle, beskriver enhver Sector, som DCH eller HCF, i samme Halvcirkel, et Legem, som kaldes en Kuglesector. Den af Buen DH eller HF beskrevne Zone er Kuglesectorens Grundflade.

Fig. 251. 305— Naar AB, BC, CD ere Sider af en regulær Polygon, O Centret, OI Radius af den indskrevne Cirkel, og Polygonlinien ABCD, der ligger heelt til samme Side af Axen FG, dreier sig om denne Axe, saa beskriver den en Flade = MQ × Periph. OI, Linien MQ er denne Flades Høide, eller den Deel af Axen der ligger mellem Perpendiculærerne AM og DQ.

Da Punktet I er Midten af AB, saa, naar IK ⊥ FG, er den af Linien AB beskrevne Flade = AB × Periph. IK (No. 292, Anm.) Drag AX ≠ FG, saa have Trianglerne ABX og OIK Siden AB ⊥ OI, AX ⊥ IK, BX ⊥ OK, altsaa △ ABX ∾ OIK (No. 121) og man har AB : AX eller MN = OI : IK = Periph. OI : Periph. IK, følgeligen AB × Periph. IK = MN × Periph. OI. Altsaa er den af Siden AB beskrevne Flade liig Productet af dens Høide og Peripherien af den i Polygonen indskrevne Cirkel. Ligeledes er den af BC beskrevne Flade = NP × Periph. OI, og den af CD beskrevne Flade = PQ × Periph. OI, altsaa er den af Polygonlinien ABCD beskrevne Flade = (MN + NP + PQ) × Periph. OI = MQ × Periph. OI d. e. Productet af Fladens Høide og Peripherien af den i Polygonen indskrevne Cirkel.

Følg. Naar Polygonen har et lige Antal Sider, og Axen FG gaaer gjennem to modstaaende Vinkelspidser F og G, da er den af Polygonens halve Contour FACG beskrevne Flade

= FG × Periph. OI d. e. Productet af Axen, eller den omskrevne Cirkels Diameter, og Peripherien af den indskrevne Cirkel.

306 — En Kugles Overflade er liig Productet af dens Diameter og Peripherien af en Storcirkel.

Lad AB være Kuglens Diameter, C Centret, saa er dens Overflade = AB × Periph. CA. Thi antag at dette Product kunne være Maalet for Overfladen af en mindre Kugle, hvis Radius er CD. Beskriv om Cirklen CD en regulær Polygon af et lige Antal Sider, som ikke træffe Peripherien CA (№ 176); lad M og S være to modstaaende Vinkelspidser af denne Polygon, og dens halve Contour MNPQRS dreie sig om Diameteren MS. Polygonlinien MPS beskriver da en Flade = MS × Periph. CD (№ 305), men MS < AB, og Periph. CD < Periph. CA, altsaa denne Flade < AB × Periph. CA, som, ifølge Hypothesen, er Maalet for Overfladen af Kuglen, hvis Radius er CD. Nu er netop omvendt den af Polygonlinien beskrevne Flade større end denne Kugleflade, fordi den første Flade aldeles indeslutter den anden (№ 284, 2°), altsaa kan Hypothesen ikke finde Sted d. v. s. Productet af en Kugles Diameter og Peripherien af dens Storcirkel kan ikke være Maalet for Overfladen af en mindre Kugle. Fig. 252.

Man beviser paa lignende Maade, at dette Produkt kan heller ikke være Maalet for Overfladen af en større Kugle; altsaa er en Kugles Overflade liig Productet af dens Diameter og Peripherien af dens Storcirkel.

Følg. Storcirklen er liig Productet af dens Peripherie og den halve Radius, eller en Fjerdedeel af Kuglens Diameter; altsaa: **Kuglens Overflade er det Fiirdobbelte af Storcirklen.**

Anm. Lad R være Radius, D Diameteren, P Peripherien, C Fladeindholdet af Kuglens Storcirkel, altsaa $C = \frac{1}{4} DP = \pi R^2$, saa er Kuglens Overflade $= DP = 4C = 4\pi R^2$.

Følg. **To Kuglers Overflader forholde sig som Qvadraterne af deres Radier eller Diametre.**

307. **En hvilkensomhelst Zones Fladeindhold er liig Productet af dens Høide og Peripherien af en Storcirkel.**

Fig. 253. Lad AF være en hvilkensomhelst Bue, mindre eller større end en Qvadrant, Linien FG perpendiculær paa Diameteren AB, og C Centret, saa er den af Buen AF, idet den dreier sig om AB, beskrevne Zone = AG $\times$ Periph. CA.

Thi antag at denne Zone kunne have et mindre Maal AG $\times$ Periph. CD. Indskriv i Buen AF en Polygonlinie AMNOF, sammensat af ligestore Chorder AM, MN, &c.,*) som ikke træffe Peripherien CD, og drag CI $\perp$ AM, saa er den af Polygonlinien ANF, idet den dreier sig om AB, beskrevne Flade = AG $\times$ Periph. CI (№ 305). Dette Product er $>$ AG $\times$ Periph. CD, som, ifølge Hypothesen, er Maalet for Zonen beskreven af Buen AF; altsaa skulde Fladen beskreven af Polygonlinien ANF være større end Fladen beskreven af den omskrevne Bue AF. Men det er netop omvendt, fordi den anden Flade omfatter den første og har samme Contour (№ 284); altsaa kunne en Zone ikke have et mindre Maal end Productet af dens Høide og Peripherien af en Storcirkel.

Samme Zone kunne heller ikke have et større Maal end dette Product. Lad Zonen være beskrevet af Buen DH, idet den dreier sig om DC, og antag at denne Zone kunne have et større Maal end dens Høide DK $\times$ Periph. CD. Den hele Kugles Overflade, sammensat af de to Zoner DH, HE, er = DE $\times$ Periph. CD = DK $\times$ Periph. CD + KE $\times$ Periph. CD; har man altsaa Zonen DH $>$ DK $\times$ Periph. CD, saa følger, at Zonen HE $<$ KE $\times$ Periph. CD, hvilket strider mod det ovenfor Beviiste.

---

*) Naar enhver af disse Chorders tilsvarende Bue, f. Ex. AM er en aliqvot Deel af Peripherien CA, da ere disse Chorder Sider af en, i Cirklen CA indskreven, reguleer Polygon.

Altsaa er en Zones Fladeindhold liig Productet af dens Høide og Peripherien af en Storcirkel.

Theoremet er egentligen kun beviist om en Zone med een Contour, men betragte vi en Zone HLIGQF med to Contourer HLI, FQG, da findes, at den er Differensen af to Zoner DFQG og DHLI, hver med een Contour, og disse have til Maal DO $\times$ Periph. CD og DX $\times$ Periph. CD, altsaa Zonen HLIGQF $=$ (DO $-$ DX) $\times$ Periph. CD $=$ XO $\times$ Periph. CD. Fig. 249.

Altsaa er en hvilkensomhelst Zones Fladeindhold liig Productet af dens Høide og Peripherien af en Storcirkel.

Følg. I. To Zoner paa samme eller ligestore Kugler forholde sig som deres Høider.

II. En hvilkensomhelst Zone forholder sig til hele Kuglefladen, som Zonens Høide til Kuglens Diameter.

308. Naar Trianglen ABC og Rectanglen BCEF dreie sig om deres fælleds Grundlinie BC, da er Legemet beskreven af Trianglen en Trediedeel af Cylindren beskreven af Rectanglen. Fig. 254.

Drag AD ⊥ Axen BC. Keglen beskreven af Trianglen ABD er en Trediedeel af Cylindren beskreven af Rectanglen BDAF (No. 293, I), og Keglen beskreven af Trianglen ADC er en Trediedeel af Cylindren beskreven af Rectanglen ADCE, altsaa er de to Keglers Sum, eller Keglen beskreven af Trianglen ABC, en Trediedeel af de to Cylindres Sum, eller Cylindren beskreven af Rectanglen BCEF.

Naar Perpendiculæren AD falder udenfor Trianglen ABC, da er Legemet beskreven af denne Triangel Differensen af de to Kegler beskrevne af Trianglerne ABD, ACD; men da er ogsaa Cylindren beskreven af Rectanglen BCEF Differensen af de to Cylindre beskrevne af Rectanglerne BDAF, ADCE. Altsaa, i ethvert Tilfælde, er Legemet beskreven af Trianglen en Trediedeel Fig. 255.

af Cylindrem beskreven af Rectanglen, med samme Grundlinie og samme Høide.

Fig. 254 og 255. Anm. Cirklen beskreven med Radius AD er $= \pi \times \overline{AD}^2$, altsaa den af Rectanglen BCEF beskrevne Cylinders Cubikindhold $= \pi \times \overline{AD}^2 \times BC$ (No. 288), og det af Trianglen ABC beskrevne Legems Cubikindhold $= \frac{1}{3} \pi \times \overline{AD}^2 \times BC$.

309— Opg. At finde Cubikindholdet af Legemet

Fig. 256. beskreven af Trianglen ABC, idet dens Plan dreier sig om Linien AD, dragen udenfor Trianglen gjennem Toppunktet A.

Forlængre Siden AB indtil den træffer Axen AD i D, og fæld, fra Punkterne B og C, Perpendiculærerne BM og CN ned paa Axen.

Det af Trianglen ABD beskrevne Legem $= \frac{1}{3} \pi \times \overline{BM}^2 \times AD$ (No. 308), og det af Trianglen ACD beskrevne Legem $= \frac{1}{3} \pi \times \overline{CN}^2 \times AD$, altsaa disse to Legemers Differens, eller det af Trianglen ABC beskrevne Legem $= \frac{1}{3} \pi \times (\overline{BM}^2 - \overline{CN}^2) \times AD$.

Dette Udtryk kunne gives en anden Form. Drag fra I, Midten af BC, Linien IK $\perp$ AD, og, fra C, Linien CO $\neq$ AD, saa har man $BM + CN = 2\,IK$ (No. 191), og $BM - CN = BO$, altsaa (No. 203) er $(BM + CN) \times (BM - CN) = \overline{BM}^2 - \overline{CN}^2 = 2\,IK \times BO$, og det af Trianglen ABC beskrevne Legem $= \frac{2}{3} \pi \times IK \times BO \times AD$. Drag AP $\perp$ BC, saa er $\triangle BCO \sim ADP$, og man har Proportionen $BO : AP = BC : AD$, følgeligen $BO \times AD = AP \times BC = 2 \times \triangle ABC$, og det af Trianglen ABC beskrevne Legem $= \triangle ABC \times \frac{4}{3} \pi \times IK = \triangle ABC \times \frac{2}{3}$ Periph. IK, altsaa: det af Trianglen ABC beskrevne Legems Cubikindhold er liig Productet af denne Triangels Fladeindhold og to Trediedeel af Peripherien beskreven af Punktet I, Midten af Basis.

Følg. Naar Siden AB = AC, da er Linien AI ⊥ BC Fig.257. altsaa $\triangle ABC = \frac{1}{2} AI . BC$ og det beskrevne Legems Cubikindhold $\frac{2}{3}\pi . IK . \triangle ABC = \frac{1}{3}\pi . IK . AI . BC$; men $\triangle BCO \sim AIK$ giver $BC : CO$ eller $MN = AI : IK$ følgeligen $BC . IK = AI . MN$, altsaa er det af den ligebenede Triangel ABC beskrevne Legems Cubikindhold $= \frac{2}{3}\pi . \overline{AI}^2 . MN$.

Anm. Den almindelige Opløsning synes at forudsætte, at Linien BC forlængret træffer sammen med Axen; men man har og samme Resultater naar Linien BC er parallel med Axen.

Thi den af Rectanglen BMNC beskrevne Cylinder er $= \pi . \overline{BM}^2 . MN$, den af Trianglen ABM beskrevne Kegle $= \frac{1}{3}\pi . \overline{BM}^2 . AM$, og den af Trianglen ACN beskrevne Kegle $= \frac{1}{3}\pi . \overline{BM}^2 . AN$, altsaa, naar fra Summen af de to første Legemer drages det tredie, har man det af Trianglen ABC beskrevne Legems Cubikindhold $= \pi . \overline{BM}^2 (MN + \frac{1}{3} AM - \frac{1}{3} AN)$, som, fordi $AN - AM = MN$, reduceres til $\pi . \overline{BM}^2 . \frac{2}{3} MN$ eller $\frac{2}{3}\pi . \overline{AP}^2 . MN$, hvilket stemmer overeens med de allerede fundne Resultater. Fig.258.

310— Naar AB, BC, CD ere Sider af en regulær Fig.251. Polygon, O Centret, OI Radius af den indskrevne Cirkel, og Polygonsectoren OABCD, der ligger heelt til samme Side af Diameteren FG, dreier sig om denne, saa beskriver den et Legem $= \frac{2}{3}\pi . \overline{OI}^2 . MQ$, Linien MQ er den Deel af Axen der ligger mellem Perpendiculærerne AM, DQ.

Da Polygonen er regulær, saa ere alle Trianglerne AOB, BOC, ꝛc. ligestore og ligebenede. Det af den ligebenede Triangel AOB beskrevne Legem er $= \frac{2}{3}\pi . \overline{OI}^2 . MN$, det af Trianglen BOC beskrevne Legem $= \frac{2}{3}\pi . \overline{OI}^2 . NP$ og det af Trianglen COD beskrevne Legem $= \frac{2}{3}\pi . \overline{OI}^2 . PQ$, altsaa Summen af disse Legemer, eller det af Polygonsectoren OABCD beskrevne Le-

gens Cubikindhold $= \frac{2}{3}\pi . \overline{OI}^2 . (MN + NP + PQ) = \frac{2}{3}\pi . \overline{OI}^2 . MQ$.

311— Enhver Kuglesectors Cubikindhold er liig Productet af Zonen, der tjener den til Grundflade, og en Trediedeel af Kuglens Radius; den hele Kugles Cubikindhold liig Productet af dens Overflade og en Trediedeel af dens Radius.

Fig. 253. Lad DHC være Cirkelsectoren, som, idet den dreier sig om DC, beskriver Kuglesectoren, saa er dennes Grundflade, eller den af Buen DH beskrevne Zone = DK $\times$ Periph. CD eller $2\pi . CD . DK$ (№ 307), altsaa skal Kuglesectorens Cubikindhold være = denne Zone $\times \frac{1}{3}$ CD eller $= \frac{2}{3}\pi . \overline{CD}^2 . DK$.

Thi antag at denne Størrelse $\frac{2}{3}\pi . \overline{CD}^2 . DK$ kunne være Maalet for en større Kuglesector beskreven af Cirkelsectoren ACF $\sim$ DCH. Indskriv i Buen AF en Polygonlinie AMNOF, sammensat af ligestore Chorder AM, MN ꝛc., som ikke træffe Peripherien CD; drag FG $\perp$ AC, og antag at Polygonsectoren CANF, i hvilken CI er Radius af den indskrevne Cirkel, dreier sig tilligemed Cirkelsectoren ACF om AC. Det af Polygonsectoren beskrevne Legem er $= \frac{2}{3}\pi . \overline{CI}^2 . AG$ (№ 310), men CI $>$ CD, og AG $>$ DK, thi forestille vi os at Chorderne AF, DH ere dragne, da har man $\triangle$ AFG $\sim$ DHK, følgeligen AG : DK = FG : HK = CF : CH, altsaa AG $>$ DK. Af disse Grunde er $\frac{2}{3}\pi . \overline{CI}^2 . AG > \frac{2}{3}\pi . \overline{CD}^2 . DK$, som, ifølge Hypothesen, er Maalet for den af ACF beskrevne Kuglesector. Altsaa skulde det af Polygonsectoren beskrevne Legem være større end den omskrevne Kuglesector, men det er netop omvendt; altsaa er det umuligt, at Productet af en Kuglesectors Grundflade og en Trediedeel af Kuglens Radius kan være Maalet for en større Kuglesector.

Samme Product kan heller ikke være Maalet for en mindre Kuglesector. Thi lad den givne Kuglesector være fremstaaet ved

Cirkelsectoren ACF, og antag at $\frac{2}{3}\pi . \overline{CA}^2 . AG$ kunne være Maalet for en mindre Kuglesector beskreven af DCH.

Udføres samme Construction som ovenfor, saa har man det af Polygonsectoren CANF beskrevne Legem $= \frac{2}{3}\pi . \overline{CI}^2 . AG$ som er $< \frac{2}{3}\pi . \overline{CA}^2 . AG$ og denne Størrelse er, ifølge Hypothesen, Maalet for Kuglesectoren beskreven af DCH. Altsaa skulde det af Polygonsectoren beskrevne Legem være mindre end denne Kuglesector, som kun er en Deel af det første Legem, men dette er umuligt; altsaa kunne Productet af en Kuglesectors Grundflade og en Trediedeel af Kuglens Radius ikke være Maalet for en mindre Kuglesector.

Man slutter altsaa, at enhver Kuglesectors Cubikindhold er liig Productet af Zonen, der tjener den til Grundflade, og en Trediedeel af Kuglens Radius.

En Cirkelsector kunde voxe indtil den bliver en Halvcirkel, og under denne Form beskriver den, idet den dreier sig om Diameteren, en heel Kugle, altsaa: **en Kugles Cubikindhold er liig Productet af dens Overflade og en Trediedeel af dens Radius.**

Anm. Naar Kuglens Radius er R, saa er dens Overflade $= 4\pi R^2$, som $\times \frac{1}{3} R$ giver Kuglens Cubikindhold $= \frac{4}{3}\pi R^3$. Naar D er Diameteren, saa, fordi $R = \frac{1}{2} D$, $R^3 = \frac{1}{8} D^3$, er Kuglens Cubikindhold $= \frac{1}{6}\pi D^3$.

Følg. To Kugler forholde sig som Cubusserne af deres Radier eller Diametre.

212. Kuglens Overflade forholder sig til den omskrevne Cylinders Overflade, som 2 til 3. Disse to Legemers Cubikindhold staae ogsaa i dette Forhold.

Lad MPNQ være Kuglens Storcirkel, ABCD det omskrevne Qvadrat; dersom nu Halvcirklen PMQ og Rectanglen PADQ, Halvdelen af Qvadratet, dreie sig om Diameteren PQ, Fig. 250.

da beskriver Halvcirklen Kuglen og Rectanglen Cylindren, omskrevne om Kuglen.

Cylindrens Høide AD er liig Kuglens Diameter PQ, Cylindrens Grundflade er liig Storcirklen MEN, fordi Diameteren DC = MN, altsaa er Cylindrens krumme Flade = Periph. OM $\times$ PQ og dette Product er ogsaa Maalet for Kuglens Overflade (№ 287, 306), hvoraf følger: **Kuglens Overflade er ligestor med den omskrevne Cylinders krumme Flade.** Men Kuglens Overflade, altsaa og Cylindrens krumme Flade er det Fiirdobbelte af Storcirklen, og lægges hertil de tvende Grundflader eller det Dobbelte af Storcirklen, saa haves Cylindrens hele Overflade ligestor med det Sexdobbelte af Storcirklen; følgeligen forholder Kuglens Overflade sig til den omskrevne Cylinders Overflade, som 4 til 6 eller som 2 til 3.

I dette Forhold staae ogsaa disse to Legemers Cubikindhold. Thi Cylindrens Cubikindhold er liig Productet af dens Grundflade og Høide (№ 288), eller Productet af Storcirklen og dens Diameter; Kuglens Cubikindhold er liig Productet af dens Overflade og $\frac{1}{3}$ af dens Radius, eller Productet af Storcirklen og $\frac{2}{3}$ af Diameteren (№ 311), altsaa forholder Kuglen sig til den omskrevne Cylinder, som 2 til 3, og følgeligen forholde disse to Legemers Cubikindhold sig som deres Overflader.

Fig.260. 313— **Opg. At finde det af Cirkelsegmentet BMD, idet det dreier sig om en Diameter udenfor samme, beskrevne Legems Cubikindhold.**

Drag BE og DF perpendiculære paa Axen AC; nedfæld fra Centret C Perpendiculæren CI paa Chorden BD, og drag Radierne CB, CD.

Det af Sectoren ACD beskrevne Legem er $= \frac{2}{3}\pi . \overline{CB}^2 . AF$ (№ 311), og det af Sectoren ACB beskrevne Legem $= \frac{2}{3}\pi . \overline{CB}^2 . AE$, altsaa er disse to Legemers Differens, eller det af Sectoren BCD beskrevne Legems Cubikindhold $= \frac{2}{3}\pi . \overline{CB}^2$

$(AF - AE) = \frac{2}{3}\pi . \overline{CB}^2 . EF$. Men det af den ligebenede Triangel BCD beskrevne Legem er $= \frac{2}{3}\pi . \overline{CI}^2 . EF$ (№ 309), altsaa er det af Segmentet BMD beskrevne Legem $= \frac{2}{3}\pi . EF . (\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2)$. Nu er, fordi $\triangle CIB$ er retvinklet, $\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2 = \overline{BI}^2 = \frac{1}{4}\overline{BD}^2$, altsaa er det af Cirkelsegmentet BMD beskrevne Legems Cubikindhold $= \frac{2}{3} . EF . \frac{1}{4}\overline{BD}^2$ eller $\frac{1}{6}\pi . \overline{BD}^2 . EF$.

Anm. Det af Segmentet BMD beskrevne Legem forholder sig til Kuglen, hvis Diameter er BD, som $\frac{1}{6}\pi . \overline{BD}^2 . EF$ til $\frac{1}{6}\pi . \overline{BD}^3$ eller $= EF : BD$.

314— Cubikindholdet af et Kuglesegment med to parallele Grundflader er liig Productet af Høiden og den halve Sum af Grundfladerne, plus Cubikindholdet af en Kugle, hvis Diameter er liig Segmentets Høide.

Lad BE og DF være Radierne af Kuglesegmentets parallele Grundflader, og EF dets Høide, altsaa Segmentet være beskrevet af Cirkelstykket BMDFE, dreiende sig om Axen EF. Det af Segmentet BMD beskrevne Legem er $= \frac{1}{6}\pi . \overline{BD}^2 . EF$ (№ 313), og den af Trapeziet BDFE beskrevne parallel afkortede Kegle $= \frac{1}{3}\pi . EF . (\overline{BE}^2 + \overline{DF}^2 + BE . DF)$ (№ 294), altsaa er disse to Legemers Sum, eller Kuglesegmentet Fig. 260.

$$= \frac{1}{6}\pi . EF . (2\,\overline{BE}^2 + 2\,\overline{DF}^2 + 2\,BE . DF + \overline{BD}^2). \quad (1)$$

Drag $BO \neq EF$, saa har man $DO = DF - BE$, altsaa (№ 202) $\overline{DO}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{DF}^2 - 2\,BE . DF$, følgeligen $\overline{BD}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{DF}^2 - 2\,BE . DF + \overline{EF}^2$.

Substitueer denne Værdie for $\overline{BD}^2$ i Udtrykket (1) og reduceer, saa har man Kuglesegments Cubikindhold

$$= \frac{1}{6}\pi . EF . (3\,\overline{BE}^2 + 3\,\overline{DF}^2 + \overline{EF}^2)$$

og dette Udtryk kan fremstilles som Summen af to andre; det ene

$$\frac{1}{6}\pi . EF . (3\,\overline{BE}^2 + 3\,\overline{DF}^2) \text{ eller } EF . \left(\frac{\pi . \overline{BE}^2 + \pi . \overline{DF}^2}{2}\right)$$

er Productet af Høiden og den halve Sum af Grundfladerne; det

andet $\frac{1}{6}\pi.\overline{EF}^3$ angiver Cubikindholdet af Kuglen, hvis Diameter er Segmentets Høide EF; altsaa er Cubikindholdet af et Kuglesegment med to parallele Grundflader liig Productet af Høiden og den halve Sum af Grundfladerne, plus Cubikindholdet af Kuglen, hvis Diameter er liig Segmentets Høide.

Følg. Den ene Grundflade kunde aftage indtil den bliver Nul, hvoraf følger, at et Kuglesegment med een Grundflade er liig Halvdelen af Cylindren med samme Grundflade og samme Høide, plus Kuglen der har denne Høide til Diameter.

Anm. Lad C og c være de to Grundflader og H Høiden af et Kuglesegment, saa er dets Cubikindhold $= \frac{1}{2}(C + c)H + \frac{1}{6}\pi H^3$. Sæt $c = o$, saa er Cubikindholdet af Segmentet, med een Grundflade, $= \frac{1}{2}CH + \frac{1}{6}\pi H^3$.

IV. Regulære Polyedre.

315. Ikkun fem regulære Polyedre ere mulige.

Thi af Definitionen (№ 243), at et Polyeder er regulær, naar alle Siderne ere regulære Polygoner og disse ere congruente, saavelsom alle Fleerplansvinklerne, følger at alle de plane Vinkler ere ligestore, og enhver af disse Vinkler bestemmes ved Antallet af Polygonens Sider (№ 169, Anm.); men ved enhver Fleerplansvinkel er Summen af de plane Vinkler mindre end 4 R (№ 239), altsaa er det kun muligt:

1º Naar alle Siderne af Polyedret ere ligesidede Triangler, og følgligen enhver af de plane Vinkler liig $\frac{2}{3}$ R, at enhver af Fleerplansvinklerne kunne være dannet af tre, eller fire, eller fem plane Vinkler; og man har saaledes de tre regulære Legemer: Tetraedret, Octaedret og Icosaedret.

2º Naar alle Siderne af Polyedret ere Qvadrater, og følgeligen alle de plane Vinkler ere rette, da kunne enhver af Fleerplansvinklerne kun være dannet af tre plane Vinkler, og man har da Hexaedret eller Cubussen.

3º Naar alle Siderne af Polyedret ere regulære Femkanter, altsaa enhver af de plane Vinkler liig $\frac{6}{5}$ R, da kunne enhver af Fleerplansvinklerne kun være dannet af tre plane Vinkler, og dette regulære Legem er Dodecaedret.

Der kunne ikke gives noget regulært Polyeder begrændset af regulære Polygoner af sex eller flere Sider; thi tre Vinkler i regulære Sexkanter, eller $3 \cdot \frac{4}{3}$ R er $= 4$ R, og tre Vinkler i regulære Polygoner af flere end sex Sider er > 4 R.

Altsaa ere kun fem regulære Polyedre mulige, nemlig tre begrændsede af ligesidede Triangler, eet af Qvadrater og eet af regulære Femkanter.

Anm. Der bevises i den paafølgende Sætning, at disse fem regulære Polyedre virkeligen gives, og at man kan bestemme

alle Dimensionerne, naar man kjender en Side eller kun en Kant af Polyedret.

316— Opg. At construere et regulært Polyeder, naar en Side eller kun en Kant af dette Polyeder er givet.

Dette Problem indbefatter fem forskjellige Tilfælde:

Fig.261. I. **Tetraedrets Construction.** Lad den ligesidede Triangel ABC være den givne Side af Tetraedret; opreis, fra denne Triangels Centrum O, Linien OS ⊥ Pl. ABC; tag Punktet S saaledes, at AS = AB, og drag SB, SC, saa er Pyramiden SABC det forlangte Tetraeder.

Thi paa Grund af de ligestore Afstande OA, OB, OC vige de skraa Linier SA, SB, SC ligemeget ud fra Perpendiculæren SO og ere ligestore; men een af disse Linier, nemlig SA = AB, ifølge Constructionen, altsaa ere de fire Sider af Pyramiden SABC ligesidede Triangler, congruente med den givne Triangel ABC. Fremdeles ere Pyramidens Treplansvinkler congruente, forbi alle de plane Vinkler ere ligestore; altsaa er denne Pyramide et regulært Tetraeder.

Fig.262. II. **Hexaedrets Construction.** Lad ABCD være det givne Qvadrat; construeer paa Grundfladen ABCD et retstaaende Prisme, hvis Høide AE = AB. Det er indlysende at alle Siderne af dette Prisme ere Qvadrater congruente med ABCD, og alle Treplansvinklerne ere congruente, forbi alle de plane Vinkler ere rette; altsaa er dette Prisme et regulært Hexaeder eller en Cubus.

Fig.263. III. **Octaedrets Construction.** Lad ABM være den givne ligesidede Triangel; construeer paa Siden AB et Qvadrat ABCD; drag, gjennem dets Centrum O, Linien ST ⊥ Pl. ABC, tag Punkterne S, T saaledes at SO = TO = AO, og drag SA, SB, TA, ꝛc., saa er det dannede Legem SABCDT sammensat af to, paa den fælleds Grundflade ABCD modsat stillede,

firsidede Pyramider, og dette Legem SABCDT er det forlangte Octaeder.

Thi, ifølge Constructionen, ere Trianglerne AOS, AOB retvinklede, og have Catheten AO = OS = OB, altsaa △ AOS ≅ AOB og AS = AB. Man beviser ligedan at de øvrige retvinklede Triangler AOT, BOS, BOT, ꝛc. ere congruente med AOB; altsaa ere alle Kanterne AB, AS, AT, ꝛc. ligestore, og følgeligen Legemet SABCDT begrændset af 8 ligesidede Triangler, congruente med den givne ABM. Fremdeles ere dette Legems Fiirplansvinkler congruente, f. Ex. S ≅ B.

Thi △ SAC ≅ BAC, altsaa ∠ ASC = ABC = R, og følgeligen er Figuren ASCT et Qvadrat ≅ ABCD. Dersom man nu bringer de to Pyramider SABCD, BASCT med deres Grundflader ABCD, ASCT til Dækning, saa, fordi disse have fælleds Centrum O og Perpendiculærerne SO, BO ere ligestore, falder Spidsen S i B, og de to Pyramider dække hinanden; altsaa er Fiirplansvinklen S ≅ B.

Altsaa er Legemet SABCDT et regulært Octaeder.

Anm. Naar tre ligestore rette Linier AC, BD, ST, med fælleds Midtepunkt O, ere perpendiculære paa hinanden, da kunne deres Endepunkter betragtes som Spidserne af et regulært Octaeder.

IV. Dodecaedrets Construction. Lad ABCDE være den givne regulære Femkant; construeer af Vinklen ABC og to med den ligestore Vinkler ABP, CBP Treplansvinklen B, og, til samme Side af Planen ABCD, i hvert af Punkterne C, D, E, A en Treplansvinkel congruent med B; bestem een af dennes Toplansvinkler (№ 241), og kald den V. Planen CBP er den samme som BCG, fordi de med Planen ABCD danne samme Toplansvinkel V. Construeer i Planen PBCG en regulær Femkant BCGFP, hvilken er ≅ ABCDE, fordi de have Siden BC tilfælleds, og udfør samme Construction i hver af de øvrige Planer CDI, DEL, ꝛc., saa har man en convex Flade sammensat af Fig. 264.

fex congruente regulære Femkanter, og hver især danner med den tilstødende en Toplansvinkel = V. Lad der være dannet en anden convex Flade *pfgh*... ≅ PFGH..., saa kunne disse to Flader saaledes forenes, at de danne Overfladen af et regulært Dodecaeder.

Thi f. Ex. Vinklen *opf* kunne forenes med Vinklerne CPB, BPF til en Treplansvinkel P ≅ B; og ved denne Forening bliver den af Planerne OPB, BPF dannede Toplansvinkel uforandret, fordi den er liig V, hvilket enhver af Toplansvinklerne i P maae være. Idet Treplansvinklen P dannes falde de ligestore Linier *pf*, PF paa hinanden, og de tre plane Vinkler PFG, *pfe*, *efg* forene sig i Punktet F til en Treplansvinkel, congruent med de allerede dannede. Ved denne Forening lider hverken Vinklen P eller Fladen *efgh*... nogen Forandring; thi Planerne PFG, *efp*, allerede forenede i P, danne en Toplansvinkel liig V, saavelsom Planerne *efg*, *efp*. Ved saaledes at vedblive finder man, at de to Flader PFGH..., *pfgh*... slutte sig med deres Contourer til hinanden, og udgjøre saaledes en sammenhængende convex Flade, som er Overfladen af et regulært Dodecaeder, forbi den er sammensat af 12 congruente regulære Femkanter, hvis Planer danne Treplansvinkler, der alle ere congruente.

Fig. 265. V. Icosaedrets Construction. Lad ABC være den givne Side: der bør da først dannes en Fleerplansvinkel af fem ligesidede Triangler, congruente med ABC, saaledes at alle fem Toplansvinkler ere ligestore. Construeer derfor paa B′C′ = BC en regulær Femkant B′C′H′I′D′, opreis paa dens Plan, i Centret O′, en Perpendiculær der ender sig i A′ saaledes, at B′A′ = B′C′, og drag A′C′, A′H′, A′I′, A′D′, saa danne de fem Planer B′A′C′, C′A′H′, ꝛc. den forlangte Fleerplansvinkel A′. Thi de fraa Linier A′B′, A′C′, A′H′ ꝛc. ere ligestore, og een af dem, nemlig A′B′ = B′C′ = BC, ifølge Constructionen, altsaa ere Trianglerne B′A′C′, C′A′H′, ꝛc. ligesidede og congruente med den givne Triangel ABC. Tillige ere alle Toplansvinklerne i

A' ligestore; thi Treplansvinklerne B', C', ꝛc. ere congruente, fordi hver især er dannet af to Vinkler i ligesidede Triangler og een Vinkel i en regulær Femkant, altsaa danne Planerne D'B'A' og A'B'C', B'C'A' og A'C'H', ꝛc. ligestore Toplansvinkler; og kalder man V een af disse Toplansvinkler, der kunne bestemmes ved Hjelp af Sætningen i № 241, saa udtrykker V tillige enhver af Toplansvinklerne i den dannede Femplansvinkel A'.

Naar man derpaa i hvert af de tre Punkter A, B, C og til samme Side af Planen ABC, danner en Femplansvinkel congruent med A', saa fremstaaer en convex Flade sammensat af ti congruente ligesidede Triangler, af hvilke hver to med en fælleds Side danne en Toplansvinkel liig V; og i Contourens Spidser D, E, F, ꝛc. ere afvexlende 3 og 2 Vinkler i ligesidede Triangler forenede. Forestiller man sig en anden Flade congruent med DEFG..., da kunne disse to Flader saaledes sammensættes, at hver Spids for tre Vinkler i den Enes Contour forenes med hver Spids for to Vinkler i den Andens Contour, og, da disse Vinklers Planer allerede danne de fornødne Toplansvinkler, hver liig V, for at kunne danne en Femplansvinkel congruent med A, saa frembringer denne Forening ikke nogen Forandring ved hver Flade især, og begge tilsammen danne en sammenhængende convex Flade, sammensat af 20 congruente ligesidede Triangler. Denne Flade er et regulært Icosaeders Overflade, fordi tillige alle Femplansvinklerne ere congruente.

317— Opg. Ved et regulært Polyeder at finde den af to hosliggende Sider dannede Toplansvinkel.

Den forlangte Toplansvinkel følger af de fem regulære Polyedres Construction (№ 316) i Forbindelse med Problemet (№ 241): ved en Treplansvinkel, hvis tre plane Vinkler ere givne, at bestemme een af Toplansvinklerne.

I. I Tetraedret er hver Fleerplansvinkel dannet af tre Fig. 261.
Vinkler i ligesidede Triangler, altsaa kan man ved denne Treplans-

vinkel bestemme den af de to Planer dannede Vinkel, og denne er den forlangte, dannet af to hosliggende Sider af Tetraedret.

Fig. 262. II. Ved Hexaedret ere to hosliggende Sider perpendiculære paa hinanden, altsaa danne de en ret Vinkel.

Fig. 263. III. Ved Octaedret. Naar man danner en Treplansvinkel af to Vinkler i ligesidede Triangler og een ret Vinkel, saa danne de to første Vinklers Planer samme Toplansvinkel som to hosliggende Sider af Octaedret.

Fig. 264. IV. I Dodecaedret er hver Fleerplansvinkel dannet af tre Vinkler i regulære Femkanter; altsaa finder man, ved Hjelp af Problemet i № 241, Toplansvinklen dannet af to hosliggende Sider af Dodecaedret.

Fig. 265. V. Icosaedret. Naar man danner en Treplansvinkel af to Vinkler i ligesidede Triangler og een Vinkel i en regulær Femkant, saa danne de to første Vinklers Planer samme Toplansvinkel som to hosliggende Sider af Icosaedret.

318— I. Naar ved et Polyeder alle Sidernes Planer tangere en Kugle, da siges denne Kugle at være **indskreven** i Polyedret, eller Polyedret at være **omskreven om Kuglen.**

II. Naar alle Spidserne af et Polyeder ligge i en Kugles Overflade, da siges dette Polyeder at være **indskreven i Kuglen,** eller Kuglen at være **omskreven om Polyedret.**

319— **Ved ethvert regulært Polyeder kan man indskrive og omskrive en Kugle.**

Fig. 266. Lad AB være een af Polyedrets Kanter, C og D Centrerne i de to hosliggende Sider, eller regulære Polygoner, og fra disse Centrer være nedfældte paa AB Perpendiculærerne CM, DM, der træffe AB i dens Midtepunkt M. De to Perpendiculærer CM, DM danne en bekjendt Vinkel CMD, som er Maalet for den af Planerne ABC, ABD dannede Toplansvinkel, bestemt ved Problemet i № 217. Drages nu i Planen CMD, som er ⊥ AB, Linien CO ⊥ CM og DO ⊥ DM, saa træffe de to Perpendiculærer CO, DO sammen i et Punkt O, som er Centret

for den indskrevne og den omskrevne Kugle, og den første Kugles Radius er OC, den anden Kugles Radius OA.

Thi de retvinklede Triangler CMO, DMO have fælleds Hypotenus MO og Cathetan CM = DM, som mindste Radier af to congruente Polygoner, altsaa △ CMO ≅ DMO, og følgeligen OC = OD. Men AB ⊥ Pl. CMD altsaa Pl. ABC ⊥ Pl. CMD eller CMD ⊥ ABC (Nº 233); nu er Linien CO, i Planen CMD, perpendiculær paa disse to Planers Overskjæringslinie CM, altsaa CO ⊥ Pl. ABC (Nº 234). Af samme Grund er DO ⊥ Pl. ABD; altsaa naar man i Centrerne af to hosliggende Sider opreiser paa deres Planer to Perpendiculærer CO, DO, da træffe disse sammen i et Punkt O og ere ligestore. Antag at ABC, ABD forestille to andre hvilkesomhelst hosliggende Sider af Polyedret, saa er stedse Polygonens mindste Radius CM den samme, saavelsom Vinklen CMO, Halvdelen af CMD; altsaa er den retvinklede Triangel CMO og Perpendiculæren CO eens ved alle Siderne af Polyedret, og følgeligen vilde en Kugle, beskrevet fra Punktet O som Centrum og med Radius OC, tangere enhver af Polyedrets Sider i dens Centrum (thi Planerne ABC, ABD ere perpendiculære paa Enden af en Radius): denne Kugle var da indskreven i Polyedret.

Drag OA, OB. Da OC ⊥ Pl. ACB og CA = CB, saa ere de skraa Linier OA, OB ligestore, og det Samme er Tilfældet med to andre Linier, dragne fra Punktet O til Endepunkterne af en hvilkensomhelst Kant af Polyedret; altsaa vilde Overfladen af en Kugle, beskrevet fra Punktet O som Centrum og med Radius OA, gaae gjennem alle Spidserne af Polyedret, og denne Kugle var da omskreven om Polyedret.

Anm. Punktet O, Centret for den indskrevne og den omskrevne Kugle, kunne betragtes som Polyedrets Centrum, og man kalder da den indskrevne Kugles Radius OC Polyedrets mindste Radius, den omskrevne Kugles Radius OA Polyedrets største Radius.

320— Opg. At finde mindste og største Radius af et regulært Polyeder, hvis Kant er givet.

Naar en Kant af Polyedret er givet da kunde en af dets Fig. 267. Sider beskrives; lad denne regulære Polygons mindste Radius være CM. Søg, ved Hjelp af Problemet i No. 317, Toplansvinklen dannet af to hosliggende Sider af dette Polyeder, og lad ∠ CMD være Maalet for denne Toplansvinkel; tag MD = CM, drag CO ⊥ CM, og DO ⊥ DM, saa træffe de to Perpendiculærer CO, DO sammen i et Punkt O, og Linien OC er Polyedrets mindste Radius.

Tag, i Forlængringen af MC, CA liig største Radius af den beskrevne regulære Polygon, saa er OA Polyedrets største Radius.

Thi de retvinklede Triangler CMO, ACO i Fig. 267 ere congruente med dem af samme Navn i Fig. 266, altsaa, imedens CM, CA ere mindste og største Radius af den regulære Polygon, som er en Side af Polyedret, ere Linierne OC, OA Polyedrets mindste og største Radius.

321— Af de foregaaende Sætninger kan man uddrage følgende Slutninger:

I. Ethvert regulært Polyeder kan deles i lige saamange congruente regulære Pyramider, som Polyedret har Sider: disse Pyramiders fælleds Spids er Polyedrets Centrum, der tillige er den indskrevne og den omskrevne Kugles Centrum.

II. Et regulært Polyeders Cubikindhold er liig Producttet af dets Overflade og en Trediedeel af mindste Radius.

III. En Kugles og et ved samme omskreven regulært Polyeders Cubikindhold forholde sig som deres Overflader. Ligeledes to hvilkesomhelst ved samme eller ligestore Kugler omskrevne regulære Polyedres Cubikindhold forholde sig som deres Overflader.*)

---

*) Denne Sætning finder ikke alene Sted ved regulære men ved hvilkesomhelst ved en Kugle omskrevne Polyedre. Thi ethvert omskrevet Po-

IV. To regulære Polyedre af samme Navn ere ligedannede Legemer: deres mindste Radier eller største Radier forholde sig som deres Kanter, deres Overflader som Quadraterne af deres Kanter, og deres Cubikindhold som Cubusserne af deres Kanter.

---

lyeder kunne betragtes sammensat af Pyramider, hvis fælleds Spids er Kuglens Centrum, og hvis Grundflader ere de forskjellige Sider af Polyedret. Alle disse Pyramider have samme Høide, nemlig Kuglens Radius, altsaa er hver Pyramide liig den af Polyedrets Sider, der tjener den til Grundflade multipliceert med en Trediedeel af Kuglens Radius, og følgeligen hele Polyedret liig dets Overflade multipliceert med en Trediedeel af den indskrevne Kugles Radius. Men denne Kugle er liig dens Overflade multipliceert med en Trediedeel af dens Radius; altsaa forholder en Kugles og et hvilkensomhelst ved samme omskreven Polyeders Cubikindhold sig som deres Overflader.

Supplement.

Bemærkninger over Fladers og Legemers Beregning.

1—. Fladers og Legemers Beregning afhænger af visse Liniers Udmaaling. Hvert Land har, for Beqvemmeligheden i Anvendelsen, fastsat flere forskjellige Linie-Eenheder eller Længdemaal. Mellem de danske Længdemaal, Fod, Alen, Favn, Miil, finde følgende Relationer Sted:

$$1 \text{ Al.} = 2 \text{ Fod}, \quad 1 \text{ Favn} = 3 \text{ Al.}, \quad 1 \text{ Miil} = 12000 \text{ Al.}$$

Foden deles i Tommer, Linier, Skrupler, saavel efter Decimal- som Duodecimalinddelingen d. v. s. at der enten gaae 10 eller 12 af en lavere Eenhed paa den nærmest høiere; og hertil slutter sig en høiere Eenhed end Fod, nemlig Rode.

For Korthed betegnes f. Ex. en Længde = 7 Roder 8 Fod 5 Tommer 9 Linier Duodecimalmaal ved $7^r 8^f 5^t 9^l$ duodec.

Mellem disse høiere og lavere Eenheder har man Relationerne:

Decimalmaal:
$$\begin{aligned} 1^r = 10^f = 100^t = 1000^l &= 10000^s \\ 1^f = 10^t = 100^l &= 1000^s \\ 1^t = 10^l &= 100^s \\ 1^l &= 10^s \end{aligned}$$

Duodecimalmaal:
$$\begin{aligned} 1^r = 12^f = 144^t = 1728^l &= 20736^s \\ 1^f = 12^t = 144^l &= 1728^s \\ 1^t = 12^l &= 144^s \\ 1^l &= 12^s \end{aligned}$$

der tjene til at udtrykke et givet Længdemaal ved en anden høiere eller lavere Eenhed. F. Ex. naar 7^f skal udtrykkes i Duodecimallinier, saa multiplicerer man 7 med 144, som giver 1008^l duodec. Omvendt bliver 1008^l duodec. udtrykt i Fod ved at dividere med 144, som giver 7^f.

Naar f. Ex. $7^f{,}384$ skal udtrykkes i Decimallinier, multipliceres det med 100 d. v. s. Kommaet flyttes to Decimalpladser til høire, altsaa $7^f{,}384 = 738^l{,}4$ dec. Omvendt bliver $738^l{,}4$ dec. udtrykt i Fod ved at flytte Kommaet to Decimalpladser til venstre, altsaa $738^l{,}4$ dec. $= 7^f{,}384$.

I ovenstaaende Exempler er et incomplext Tal blevet udtrykt ved en anden høiere eller lavere Eenhed; men Spørgsmaalet kunde være: at giøre et complext Tal, der udtrykker et Længdemaal, til et incomplext Tal af en opgiven Art, og omvendt. F. Ex. naar der forlanges at udtrykke $3^r 7^f 11^t 3^l$ duodec. i Fod, saa reduceres først $3^r 7^f = 3 \times 12 + 7 = 43^f$, dernæst $11^t 3^l = 11^t\tfrac{1}{4} = \tfrac{45}{48}^f = \tfrac{15}{16}^f$, altsaa $3^r 7^f 11^t 3^l$ duodec. $= 43^f\tfrac{15}{16}$. Omvendt er $43^f\tfrac{15}{16} = 3^r 7^f\tfrac{15}{16} = 3^r 7^f 11^t 3^l$.

Lettere reduceres et Decimalmaal f. E. $2^{r}9^{f}7^{t}8^{l}$ til Fod; man finder $29^{f},78$. Omvendt er $29^{f},78 = 2^{r}9^{f},78 = 2^{r}9^{f}7^{t}8^{l}$.

2— Ved at sammenligne Eenheder af samme Navn i Decimal- og Duodecimalinddelingen kan man danne følgende Tabel:

12^{r}	dec.	=	10^{r}	duodec.
1^{f}	"	=	1^{f}	"
10^{t}	"	=	12^{t}	"
100^{l}	"	=	144^{l}	"
1000^{s}	"	=	1728^{s}	"

der tjener til at forvandle Duodecimalmaal til Decimalmaal, og omvendt. F. Ex. naar $3^{r}7^{f}11^{t}3^{l}$ duodec. skal forvandles til Decimalmaal, saa reduceres først $3^{r}7^{f} = 43^{f} = 4^{r}3^{f}$ dec. dernæst $11^{t}3^{l} = 135^{l}$ duodec. $= 135 \times \frac{100}{144} = 93^{l},75$ dec. $= 9^{t}3^{l}7^{s},5$, altsaa $3^{r}7^{f}11^{t}3^{l}$ duodec. $= 4^{r}3^{f}9^{t}3^{l}7^{s},5$ dec. Omvendt forvandles $4^{r}3^{f}9^{t}3^{l}7^{s},5$ dec. til Duodecimalmaal ved først at reducere $4^{r}3^{f} = 43^{f} = 3^{r}7^{f}$ duodec., dernæst $9^{t}3^{l}7^{s},5 = 937^{s},5$ dec. $= 937,5 \times \frac{1728}{1000} = 1620^{s} = 135^{l} = 11^{t}3^{l}$ duodec., altsaa $4^{r}3^{f}9^{t}3^{l}7^{s},5$ dec. $= 3^{r}7^{f}11^{t}3^{l}$ duodec.

3— For at kunne operere med denne Slags Størrelser ville vi anføre Hovedreglerne for Regningen med complexe Tal.

Addition. Man adderer Eenheder af samme Navn, hvert Slags for sig, idet man begynder med de laveste, og reducerer Partialsummerne.

	$10^{r}\ 9^{f}6^{t}4^{l}$	duodec.	$16^{r}3^{f}4^{t}7^{l}$	dec.
	9 4 7 2		11 9 0 8	
	18 10 5 3		4 7 2 5	
Sum =	$39^{r}\ 0^{f}6^{t}9^{l}$		Sum = $32^{r}9^{f}8^{t}0^{l}$	

Subtraction. Man behandler hvert Slags Eenheder for sig, idet man begynder med de laveste; men naar Antallet af Eenheder i Subtrahendus er større end i Minnendus, da laaner man en Eenhed af de nærmest høiere.

Minnuend.	$13^{r}8^{f}\ 3^{t}11^{l}$	duodec.	$4^{r}0^{f}6^{t}9^{l}$	dec.
Subtrah.	9 7 10 6		2 5 8 3	
Differens	$4^{r}0^{f}\ 5^{t}\ 5^{l}$		$1^{r}4^{f}8^{t}6^{l}$	

Multiplication. Naar et complext Tal skal multipliceres med et abstract Tal, saa multiplicerer man hvert Slags Eenheder, fra de laveste, med det abstracte Tal, og reducerer Partialproducterne.

$9^{f}\ 4^{t}7^{l}3^{s}$ duodec.	$4^{f}3^{t}9^{l}6^{s}$ dec.
5	4
$3^{r}10^{f}11^{t}0^{l}3^{s}$	$1^{r}7^{f}5^{t}8^{l}4^{s}$

Division. 1° Naar et complext Tal skal divideres med et abstract Tal, saa dividerer man hvert Slags Eenheder, fra de høieste, og reducerer hver Rest til Eenheder af det nærmest lavere Slags.

F. Ex. naar en Linie $a = 2^r 5^f 8^t 3^l$ duodec. skal deles i 5 ligestore Dele, saa finder man

$$\frac{2^r 5^f 8^t 3^l : 5}{\tfrac{1}{5}a = 5^f 11^t 3^l \text{ duodec.}}$$

2° Naar et complext Tal skal divideres med et andet af samme Art, saa gjøres de til incomplexe af samme Navn.

F. Ex. naar der forlanges at finde Forholdet mellem en Linie $a = 2^r 0^f 5^t 5^l$ dec. og en anden Linie $b = 2^f 7^t 4^l$ dec., saa reduceres begge disse Tal til Linier, som giver

$$a = 2^r 0^f 5^t 5^l = 2055^l,\ b = 2^f 7^t 4^l = 274^l, \text{ og man finder } \frac{a}{b} = \frac{2055}{274} = 7{,}5$$

4 Flade-Eenheden er et Qvadrat, hvis Side er Linie-Eenheden. Til de forskjellige Linie-Eenheder haves tilsvarende Flade-Eenheder, f. Ex. en Qvadratfod er et Qvadrat, hvis Side $= 1^f$, en Qvadrattomme Decimal- eller Duodecimalmaal er et Qvadrat, hvis Side $= 1^t$ dec. eller duodec. &c.

For Korthed betegnes f. Ex. et Flademaal = 17 Qvadratroder 49 Qvadratfod 76 Qvadrattommer 115 Qvadratlinier Duodecim. ved $17^{qr} 49^{qf} 76^{qt} 115^{ql}$ duodec.

Mellem de forskjellige Flade-Eenheder har man Relationerne:

1 Qv. Al. $= 4^{qf}$, 1 Qv. Favn = 9 Qv. Al. $= 36^{qf}$, 1 Qv. Miil = 144000000 Qv. Al. $= 576000000^{qf}$.

Decimalmaal
$$\begin{cases} 1^{qr} = 100^{qf} = 10000^{qt} = 1000000^{ql} \\ 1^{qf} = 100^{qt} = 10000^{ql} \\ 1^{qt} = 100^{ql} \end{cases}$$

Duodecimalmaal
$$\begin{cases} 1^{qr} = 144^{qf} = 20736^{qt} = 2985984^{ql} \\ 1^{qf} = 144^{qt} = 20736^{ql} \\ 1^{qt} = 144^{ql} \end{cases}$$

der tjene til at udtrykke et givet Flademaal ved en anden høiere eller lavere Flade-Eenhed. F. Ex. naar 3^{qf} skal udtrykkes i Duodecimal-Qvadrattommer, saa multiplicerer man 3 med 144, som giver 432^{qt} duodec. Omvendt bliver 432^{qt} duodec. udtrykt i Fod ved at dividere med 144, som giver 3^{qf}.

Naar f. Ex. $8^{qf},096$ skal udtrykkes i Decimal-Qvadrattommer, saa multiplicerer man 8,096 med 100 d. v. s. man flytter Kommaet to Decimalpladser til høire, altsaa $8^{qf},096 = 809^{qt},6$ dec. Dersom dette skulde udtrykkes i Decimal-Qvadratlinier, saa flyttes atter Kommaet to Decimalpladser til høire, og man har $809^{qt},6 = 80960^{ql}$. Omvendt bliver 80960^{ql} dec. udtrykt i Qvadrattommer ved at dividere med 100, som giver $809^{qt},60$ dec.; og dersom dette skulde udtrykkes i Qvadratfod, divideres atter med 100, d. v. s. Kommaet flyttes to Decimalpladser til venstre, og man har $8^{qf},0960$ eller $8^{qf},096$.

Paa samme Maade vil man let kunne gjøre et complext Tal, der udtrykker et Flademaal, til et incomplext Tal af en opgiven Art, og omvendt. F. E. naar der forlanges at udtrykke $6^{qr} 59^{qf} 24^{qt}$ duodec. i Qvadratfod, saa reduceres først $6^{qr} 59^{qf} = 6 \times 144 + 59 = 923^{qf}$, dernæst $24^{qt} = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}{}^{qf}$, altsaa $6^{qr} 59^{qf} 24^{qt}$ duodec. $= 923^{qf}\frac{1}{6}$. Omvendt er $923^{qf}\frac{1}{6} = 6^{qr} 59^{qf}\frac{1}{6} = 6^{qr} 59^{qf} 24^{qt}$ duodec.

Lettere reduceres et Decimalmaal f. Ex. $4^{qr}71^{qf}92^{qt}8^{ql}$ til Qvadratfod: man har $4^{qr}71^{qf} = 471^{qf}$ og $92^{qt}8^{ql} = 92^{qt},08 = 0^{qf},9208$, altsaa $4^{qr}71^{qf}92^{qt}8^{ql}$ dec. $= 471^{qf},9208$. Omvendt er $471^{qf},9208 = 4^{qr}71^{qf},9208 = 4^{qr}71^{qf}92^{qt}8^{ql}$ dec.

5— Ved at sammenligne Flade-Eenheder af samme Navn i Decimal- og Duodecimalinddelingen kan man danne følgende Tabel:

144^{qr}	dec.	=	100^{qr}	duodec.
1^{qf}	„	=	1^{qf}	„
100^{qt}	„	=	144^{qt}	„
10000^{ql}	„	=	20736^{ql}	„

der tjener til at forvandle et Duodecimal-Flademaal til Decimalmaal, og omvendt. F. Ex. naar $6^{qr}59^{qf}24^{qt}$ duodec. skal forvandles til Decimalmaal, saa reduceres først $6^{qr}59^{qf} = 923^{qf} = 9^{qr}23^{qf}$ dec., dernæst 24^{qt} duodec. $= 24 \times \frac{100}{144} = 16^{qt},666\ldots$ dec. $= 16^{qt}66^{ql},6\ldots$ dec., altsaa $6^{qr}59^{qf}24^{qt}$ duodec. $= 9^{qr}23^{qf}16^{qt}66^{ql},6\ldots$ dec. Omvendt forvandles $9^{qr}23^{qf}16^{qt}66^{ql},(6)$ dec. til Duodecimaal ved først at reducere $9^{qr}23^{qf} = 923^{qf} = 6^{qr}59^{qf}$ duodec., dernæst $16^{qt}66^{ql},(6) = 1666^{ql},(6)$ dec. $= 1666,(6) \times \frac{20736}{10000} = 3456^{ql}$ duodec. $= 24^{qt}$ duodec., altsaa $9^{qr}23^{qf}16^{qt}66^{ql},(6)$ dec. $= 6^{qr}59^{qf}24^{qt}$ duodec.

6— Da enhver Figur kan forvandles til en Rectangel, og en Rectangels Fladeindhold er liig Productet af dens Grundlinie og Høide, saa kan Spørgsmaalet om Figurers Beregning stedse bringes hen paa at danne Productet af to givne Linier.

1° Naar disse to Linier ere udtrykte ved incomplexe Tal af samme Navn, da er det forlangte Flademaal liig Productet af de to givne abstracte Tal og Flade-Eenheden, som er et Qvadrat, hvis Side er den angivne Linie-Eenhed.

F. Ex. naar en Rectangels Grundlinie $a = 5^{f},27$ og Høide $b = 3^{f},8$, saa er dens Fladeindhold

$$ab = 5,27 \times 3,8 = 20^{qf},026$$

d. v. s. 20 Qvadratfod plus 26 Tusindedele af en Qvadratfod; eller, naar man gjør dette Resultat til et complext Tal,

$$ab = 20^{qf}2^{qt}60^{ql} \text{ dec.}$$

2° Naar et Flademaal er givet som Product af to Linier udtrykte ved complexe Tal, da bør disse gjøres til incomplexe Tal af samme Navn, og Spørgsmaalet er da bragt hen paa forrige Tilfælde.

Forlanger man f. Ex. Fladeindholdet af en Rectangel, hvis Grundlinie $= 2^{r}3^{f}4^{t}6^{l}$ duodec. og Høide $= 1^{r}0^{f}10^{t}8^{l}$ duodec., saa kunde man udtrykke begge disse Liniemaal ved den laveste Eenhed, nemlig Linie, som giver $2^{r}3^{f}4^{t}6^{l} = 3942^{l}$ og $1^{r}0^{f}10^{t}8^{l} = 1856^{l}$, og danne Productet $3942 \times 1856 = 7316352^{ql} = 50808^{qt} = 352^{qf}120^{qt} = 2^{qr}64^{qf}120^{qt}$ duodec.

Lettere udføres Regningen i dette Exempel, naar man forvandler de givne Liniemaal til Fod. Man finder $2^{r}3^{f}4^{t}6^{l} = 27^{f}\frac{3}{8}$ og $1^{r}0^{f}10^{t}8^{l} = 12^{f}\frac{8}{9}$, altsaa

Rectanglens Fladeindhold $= 27\frac{3}{8} \times 12\frac{8}{9} = 352^{qf}\frac{5}{6} = 2^{qr}64^{qf}\frac{5}{6} = 2^{qr}64^{qf}120^{qt}$ duodec.

7— Volum-Eenheden er en Cubus, hvis Kant er Linie-Eenheden. Til de forskjellige Linie-Eenheder haves tilsvarende Volum-Eenheder, f. Ex. en Cubikfod er en Cubus, hvis Kant $= 1^{f}$, en Cubiktomme Decimal- eller Duodecimalmaal er en Cubus, hvis Kant $= 1^{t}$ dec. eller duodec., ꝛc.

For Korthed betegnes f. Ex. et Cubikmaal = 2 Cubikroder 516 Cubikfod 1289 Cubiktommer 650 Cubiklinier Duodecim. ved $2^{cr}516^{cf}1289^{ct}650^{cl}$ duodec.

Mellem de forskjellige Volum-Eenheder har man Relationerne:

$$1 \text{ Cub. Al.} = 8^{cf}, \; 1 \text{ Cub. Favn} = 27 \text{ Cub. Al.} = 216^{cf}$$

Decimalmaal.				Duodecimalmaal.			
$1^{cr}=$	$1000^{cf}=$	$1000000^{ct}=$	1000000000^{cl}	$1^{cr}=$	$1728^{cf}=$	$2985984^{ct}=$	5159780352^{cl}
	$1^{cf}=$	$1000^{ct}=$	1000000^{cl}		$1^{cf}=$	$1728^{ct}=$	2985984^{cl}
		$1^{ct}=$	1000^{cl}			$1^{ct}=$	1728^{cl}

der tjene til at udtrykke et givet Cubikmaal ved en anden høiere eller lavere Volum-Eenhed. F. Ex. naar 4^{cf} skal udtrykkes i Duodecimal-Cubiktommer, saa multiplicerer man 4 med 1728, som giver 6912^{ct}. Omvendt bliver 6912^{ct} duodec. udtrykt i Cubikfod ved at dividere med 1728, som giver 4^{cf}.

Naar f. Ex. $72^{cf},38209$ skal udtrykkes i Decimal-Cubiktommer, saa multiplicerer man 72,38209 med 1000 d. v. s. man flytter Kommaet tre Decimalpladser til høire, og man har $72^{cf},38209 = 72382^{ct},09$ dec. Dersom dette skulde udtrykkes i Decimal-Cubiklinier, saa flyttes atter Kommaet tre Decimalpladser til høire, og man har $72382^{ct},09 = 72382090^{cl}$. Omvendt bliver 72382090^{cl} dec. udtrykt i Cubiktommer ved at dividere med 1000, som giver $72382^{ct},09$ dec.; og, dersom dette skulde udtrykkes i Cubikfod, divideres atter med 1000 d. v. s. Kommaet flyttes tre Decimalpladser til venstre, og man har $72^{cf},38209$.

Paa samme Maade vil man let kunne gjøre et complext Tal, der udtrykker et Cubikmaal, til et incomplext Tal af en opgiven Art, og omvendt. F. Ex. naar der forlanges at udtrykke $2^{cr}879^{cf}1404^{ct}$ duodec. i Cubikfod, saa reduceres først $2^{cr}879^{cf} = 2 \times 1728 + 879 = 4335^{cf}$, dernæst $1404^{ct} = \frac{1404}{1728} = \frac{13}{16}^{cf}$, altsaa $2^{cr}879^{cf}1404^{ct}$ duodec. $= 4335^{cf}\frac{13}{16}$. Omvendt er $4335^{cf}\frac{13}{16} = 2^{cr}879^{cf}\frac{13}{16} = 2^{cr}879^{cf}1404^{ct}$ duodec.

Lettere reduceres et Decimalmaal f. Ex. $1^{cr}208^{cf}640^{ct}27^{cl}$ dec. til Cubikfod: man har $1^{cr}208^{cf} = 1208^{cf}$ og $640^{ct}27^{cl} = 640^{ct},027 = 0^{cf},640027$, altsaa $1^{cr}208^{cf}640^{ct}27^{cl}$ dec. $= 1208^{cf},640027$. Omvendt er $1208^{cf},640027 = 1^{cr}208^{cf},640027 = 1^{cr}208^{cf}640^{ct}27^{cl}$ dec.

8— Ved at sammenligne Volum-Eenheder i Decimal- og Duodecimalinddelingen kan man danne følgende Tabel:

1728^{cr} dec. = 1000^{cr} duodec.
1^{cf} „ = 1^{cf} „
1000^{ct} „ = 1728^{ct} „
1000000^{cl} „ = 2985984^{cl} „

der tjener til at forvandle et Duodecimal-Cubikmaal til Decimalmaal, og omvendt. F. Ex. naar $2^{cr}879^{cf}1404^{ct}$ duodec. skal forvandles til Decimalmaal, saa reduceres først $2^{cr}879^{cf} = 4335^{cf} = 4^{cr}335^{cf}$ dec. dernæst 1404^{ct} duodec. $= 1404 \times \frac{1000}{1728} = 812^{ct}\frac{1}{2}$ dec. $= 812^{ct}500^{cl}$ dec., altsaa $2^{cr}879^{cf}1404^{cl}$ duodec. $= 4^{cr}335^{cf}812^{ct}500^{cl}$ dec. Omvendt forvandles $4^{cr}335^{cf}812^{ct}500^{cl}$ dec. til Duodecimalmaal ved først at reducere $4^{cr}335^{cf} = 4335^{cf} = 2^{cr}879^{cf}$ duodec., dernæst $812^{ct}500^{cl} = 812^{ct},5$ dec. $= 812,5 \times \frac{1728}{1000} = 1404^{ct}$ duodec., altsaa $4^{cr}335^{cf}812^{ct}500^{cl}$ dec. $= 2^{cr}879^{cf}1404^{ct}$ duodec.

9— Da ethvert Legem kan forvandles til et retvinklet Parallelepiped, og et retvinklet Parallelepipeds Cubikindhold er liig Productet af dets Grundflade og Høide, eller Productet af dets tre Dimensioner, saa kan Spørgsmaalet om Volumers Beregning stedse bringes hen paa at danne Productet af tre givne Linier.

1° Naar disse tre Linier ere udtrykte ved incomplexe Tal af samme Navn, da er det forlangte Cubikmaal liig Productet af de tre givne abstracte Tal og Volum-Eenheden, som er en Cubus, hvis Kant er den angivne Linie-Eenhed.

F. Ex. naar ved et retvinklet Parallelepipid en Treplansvinkels tre Kanter $a = 5^{f},27$, $b = 3^{f},8$, $c = 8^{f},46$, saa er Parallelepipedets Grundflade $ab = 5,27 \times 3,8 = 20^{qf},026$, og Cubikindhold $abc = 20,026 \times 8,46 = 169^{cf},41996$ d. v. s. 169 Cubikfod plus 41996 Hundredtusinddele af en Cubikfod; eller, naar man gjør dette Resultat til et complext Tal,

$$abc = 169^{cf}419^{ct}960^{cl} \text{ dec.}$$

2° Naar et Cubikmaal er givet som Product af tre Linier udtrykte ved complexe Tal, da bør disse gjøres til incomplexe Tal af samme Navn, og Spørgsmaalet er da bragt hen paa forrige Tilfælde.

Forlanger man f. Ex. Cubikindholdet af et retvinklet Parallelepiped, hvis tre Dimensioner ere $a = 2^{r}3^{f}4^{t}6^{l}$, $b = 1^{r}0^{f}10^{t}8^{l}$, $c = 1^{r}6^{f}9^{t}$ Duodecimalmaal, saa kunde man udtrykke a og b ved den laveste Eenhed nemlig Linie, som giver $a = 2^{r}3^{f}4^{t}6^{l} = 3942^{l}$ og $b = 1^{r}0^{f}10^{t}8^{l} = 1856^{l}$, danne Productet $ab = 3942 \times 1856 = 7316352^{ql} = 50808^{qt}$ duodec., og multiplicere dette med $c = 1^{r}6^{f}9^{t} = 225^{t}$ duodec., som giver Parallelepipedets Cubikindhold

$$abc = 50808 \times 225 = 11431800^{ct} = 6615^{cf}1080^{ct} = 3^{cr}1431^{cf}1080^{ct} \text{ duodec.}$$

Lettere udføres Regningen i dette Exempel, naar man forvandler de givne Liniemaal til Fod. Man finder $a = 2^{r}3^{f}4^{t}6^{l} = 27^{f}\frac{3}{8}$, $b = 1^{r}0^{f}10^{t}8^{l} = 12^{f}\frac{8}{9}$, $c = 1^{r}6^{f}9^{t} = 18^{f}\frac{3}{4}$, altsaa Parallelepipedets Cubikindhold

$$abc = 27\tfrac{3}{8} \times 12\tfrac{8}{9} \times 18\tfrac{3}{4} = 6615^{cf}\tfrac{5}{8} = 3^{cr}1431^{cf}\tfrac{5}{8} = 3^{cr}1431^{cf}1080^{ct} \text{ duodec.}$$

Som andet Exempel være $a = 8^f7^t5^l$, $b = 6^f5^t$, $c = 4^f2^t5^l$ Decimalmaal, saa er $a = 8^f,75 = 8^f\frac{3}{4}$, $b = 6^f,5 = 6^f\frac{1}{2}$, $c = 4^f,25 = 4^f\frac{1}{4}$, altsaa Parallelepipedets Cubikindhold:

$$abc = 8\tfrac{3}{4} \times 6\tfrac{1}{2} \times 4\tfrac{1}{4} = \tfrac{7735}{32}{}^{cf} = 241^{cf},71875 = 241^{cf}718^{ct}750^{cl} \text{ dec.}$$

10— For at give Begynderen Leilighed til Øvelse i Rumstørrelsers Beregning vedføies følgende

Numeriske Opgaver.

I. Hvorstor er Længden af Buen paa 1°, af Buen paa 1′, og af Buen paa 1″ i en Cirkel, hvis Radius = 1.

NB. En Bue, hvis Gradering er f. Ex. een Grad, betegnes arc 1°.

$$\text{Opl.} \begin{cases} \text{arc } 1^\circ = 0.0174532925.. \\ \text{arc } 1' = 0.0002908882.. \\ \text{arc } 1'' = 0.0000048481.. \end{cases}$$

II. At finde Længden x af en Bue paa 46°21′ beskrevet med Radius = $2^f9^t4^l$ duodec.

Opl. $x = 2^f2^t11^l,58$.. duodec.

III. Hvilken Gradering har Buen = Radius.

Sv. 57°17′44″,80625..

IV. Naar en Bue paa 265°24′36″ er $5^f,898$ lang, med hvilken Radius er den da beskrevet.

Sv. $1^f,273$..

V. Naar en Bue paa 66°50′24″ har samme Længde som en anden Bue paa 27°51′ beskrevet med Radius $2^r7^f6^t$ duodec., med hvilken Radius er da den første Bue beskrevet.

Sv. $1^r1^f1^t6^l$ duodec.

VI. I en Cirkel staae tre Vinkler A = 24°, B = 30°, C = 70° paa een og samme Bue = $\frac{1}{6}$ af Peripherien; hvorledes ligge disse Vinklers Toppunkter med Hensyn til Cirklen.

Sv. Toppunktet af Vinklen A ligger udenfor Peripherien, af B i Peripherien, af C mellem Centret og Buen.

VII. At finde Fladeindholdet X af en Triangel, hvis Grundlinie = $29^r1^f9^t$ duodec. og Høide = $16^r6^f3^t$ duodec.

Opl. $X = 240^{qr}108^{qf}139^{qt}72^{ql}$ duodec.

VIII. Hvorstor er Høiden x af en Triangel, hvis Fladeindhold = [illegible]60^{qr} dec. og Grundlinie = $43^r7^f5^t$ dec.

Opl. $x = 21^r6^f$ dec.

IX. At finde Siden x af en ligesidet Triangel, hvis Fladeindhold = 100^{qf}.

Opl. $x = 15^f,1967$..

X. At finde Fladeindholdet X af et Trapezium, hvis parallele Sider ere: den ene $= 4^f0^t7^l$, den anden $= 1^f6^t3^l$, og hvis Høide $= 3^f2^t1^l$ Duodecimalmaal.

Opl. $X = 8^{qf}120^{qt}49^{ql}$ duodec.

XI. At finde Høiden x af et Trapezium, hvis Fladeindhold $= 52^{qf},471$ og hvis parallele Sider ere: den ene $= 8^f,3$, den anden $= 7^f,02$.

Opl. $x = 6^f,85$.

XII. Naar Fladeindholdet af en Rhombus er $= 71^{qf},34$ og dens ene Diagonal $= 9^f,84$, hvorstor er da dens anden Diagonal x.

Opl. $x = 14^f,5$.

XIII. Man har givet to ligesidede Triangler: den førstes Side $= 4^f,2$, den andens Side $= 3^f,41$, og der forlanges Siden x af en tredie ligesidet Triangel, som skal være liig Summen af de to første.

Opl. $x = 5^f,41$.

XIV. At finde Siden x af en regulær Femkant, hvis mindste Radius $= 8^r7^f$ dec. og Fladeindhold $= 435^{qr}$ dec.

Opl. $x = 20^r$ dec.

XV. Hvorstor er Peripherien x og Fladeindholdet X af en Cirkel beskrevet med Radius $= 21^f,07$.

Opl. $\begin{cases} x = 132^f,3867.. \\ X = 1394^{qf},694.. \end{cases}$

XVI. Hvorstor er Diameteren x og Peripherien y af en Cirkel, hvis Fladeindhold $= 30^{qf},25$.

Opl. $\begin{cases} x = 6^f,206.. \\ y = 19^f,496.. \end{cases}$

XVII. At finde Diameteren x til en Cirkel $= \frac{4}{9}$ af Cirklen beskrevet med Radius $= 2^f,07$.

Opl. $x = 2^f,76$.

XVIII. At finde Fladeindholdet X af en Cirkel, i hvilken to, under en ret Vinkel sammenstødende, Chorder ere; den ene $= 7^f,2$, den anden $= 6^f,5$.

Opl. $X = 73^{qf},8981..$

XIX. Man har en Cirkelring, dannet af to concentriske Cirkellinier: den enes Radius $= 1^f4^t10^l$, den andens Radius $= 1^f4^t6^l$ duodec., og man forlanger Radius x til en Cirkel ligestor med den givne Cirkelring.

Opl. $x = 3^t4^l$ duodec.

XX. Der er givet to Cirkler: den førstes Peripherie $= 7^f,28$, den andens Peripherie $= 6^f,15$, og der forlanges Diameteren x til en Cirkel ligestor med Summen af de to givne Cirkler.

Opl. $x = 3^f,03349..$

XXI. Man har tre givne Cirkler; den førstes Diameter $= 16^{t}$, den andens Diameter $= 30^{t}$, den tredies Diameter $= 68^{t}\frac{1}{4}$ duodec., og man skal finde Diameteren x til en fjerde Cirkel ligestor med Summen af de tre givne Cirkler.

Opl. $x = 76^{t}\frac{3}{4} = 6^{f}4^{t}3^{l}$ duodec.

XXII. At beregne Fladeindholdet X af en Cirkelsector, hvis Radius $= 4^{f}9^{t}$ duodec. og Centrivinkel $= 54°15'$.

Opl. $X = 10^{qf}98^{qt}20^{ql},6$.. duodec.

XXIII. Hvorstor er Centrivinklen i en Cirkelsector, hvis Radius $= 1^{f}$ og Fladeindhold $= 1^{qf}$.

Sv. $114°35'29''$..

XXIV. At beregne Fladeindholdet X af et Cirkelsegment, hvis Bue $= 90°$ er beskrevet med Radius $= 8^{f}4^{t}$ duodec.

Opl. $X = 19^{qf}117^{qt}141^{ql}$ duodec.

XXV. At beregne Overfladen S og Cubikindholdet V af en regulær firkantet Pyramide, hvis Høide $= 1^{f},5$ og hvis Grundflades Side $= 1^{f},6$.

Opl. $\begin{cases} S = 8^{qf} \\ V = 1^{cf},28 \end{cases}$

XXVI. Naar et retstaaende Prismes Grundflade er en regulær Nikant, hvis Side $= 1^{f}9^{t}$ duodec. og mindste Radius $= 1^{f}8^{t}$, og Prismets Høide $= 8^{f}9^{t}4^{l}$, hvorstor er da dets Overflade S og Cubikindhold V.

Opl. $\begin{cases} S = 164^{qf}72^{qt} \text{ duodec.} \\ V = 115^{cf}360^{ct} \quad \text{"} \end{cases}$

XXVII. Hvorstor er Høiden x af en Pyramide, hvis Grundflade $= 5^{qf}89^{qt}$ duodec. og Cubikindhold $= 64^{cf}645^{ct},5$.

Opl. $x = 11^{f}5^{t}6^{l}$ duodec.

XXVIII. At beregne Cubikindholdet V af en parallel afkortet Pyramide, hvis underste Grundflade $= 3^{qf},43$, øverste Grundflade $= 1^{qf},75$ og Høide $= 9^{f}$.

Opl. $V = 22^{cf},89$.

XXIX. Et skraataffkjaaren tresidet Prismes Grundflade er $= 3^{qf},094$, dets tre parallele Kanter have en Inclination $= 45°$ mod Grundfladen, og den ene af disse tre Kanter er $= 10^{f},74$, den anden $= 9^{f},81$, den tredie $= 9^{f},45$; hvorstor er dette Prismes Cubikindhold V.

Opl. $V = 21^{cf},87788$..

XXX. Et retvinklet Parallelepiped, hvor tre Kanter af en Treplansvinkel ere: den ene $= 4^{f}6^{t}$, den anden $= 2^{f}8^{t}$, den tredie $= 2^{f}3^{t}$, Duodecimalmaal skal forvandles til en Cubus; hvorstor er dennes Kant x.

Opl. $x = 3^{f}$.

XXXI. En Pyramide, hvis Cubikindhold $= 8^{cf},75$ afskjæres parallel med Grundfladen i en Afstand $= \frac{3}{5}$ af hele Pyramidens Høide; hvorstor er den afkortede Pyramides Cubikindhold V.

Opl. $V = 8^{cf},19$.

XXXII. At beregne Overfladen S og Cubikindholdet V af en retstaaende Cylinder, hvis Høide $= 7^{f},5^{t}$ duodec. og Grundflades Radius $= 11^{t}$ duodec.

Opl. $\begin{cases} S = 48^{qf} \\ V = 19^{cf}1000^{ct} \text{ duodec.} \end{cases}$

XXXIII. Hvorstor er Høiden x af en Cylinder, hvis Cubikindhold $= 1^{cf}$, og Grundfladens Peripherie $= 2^{f}$.

Opl. $x = 3^{f},14159\ldots$

XXXIV. At beregne Cubikindholdet V af en huul Cylinder, hvis ydre Diameter $= 9^{t}$ duodec., indre Diameter $= 8^{t}$ duodec., og Høide $= 4^{f}$.

Opl. $V = 640^{ct},8849\ldots$

XXXV. Naar en retstaaende parallel afkortet Kegles Sidelinie er $= 11^{f}1^{t}5^{l}$, dens øverste Grundflades Radius $= 1^{f}6^{t}4^{l}$, og dens underste Grundflades Radius $= 2^{f}1^{t}$ Duodecimalmaal, hvorstor er da dette Legems Overflade S og Cubikindhold V.

Opl. $\begin{cases} S = 146^{qf}114^{qt}80^{ql} \text{ duodec.} \\ V = 113^{cf}865^{ct}1590^{cl} \text{ duodec.} \end{cases}$

XXXVI. En retstaaende Kegle, hvis Høide $= 2^{f}$ og Grundflades Radius $= 7^{t}$ duodec. skal, ved et Snit parallel med Grundfladen, deles saaledes i to Dele, at Stykket ved Spidsen forholder sig til det andet som 8:19. Der spørges om 1° Snittets Afstand x fra Spidsen, 2° Forholdet φ af det øverste Stykkes Overflade til det underste Stykkes Overflade.

Opl. $\begin{cases} x = 16^{t} \text{ eller } 1^{f}4^{t} \text{ duodec.} \\ \varphi = \frac{16}{27}. \end{cases}$

XXXVII. Hvorstor er Diameteren x i en Kugle af samme Overflade som en Cylinder, hvis Høide $= 6^{f}1^{t}6^{l}$ duodec. og Grundflades Radius $= 10^{t}6^{l}$ duodec.

Opl. $x = 3^{f}6^{t}$ duodec.

XXXVIII. At finde Diameteren x af en Kugle, hvis Cubikindhold $= 125^{ct}$ dec.

Opl. $x = 6^{t},203505\ldots$ dec.

XXXIX. At finde en Cylinder og en Kegle af samme Cubikindhold som en Kugle, hvis Diameter $= 1$, og af den Beskaffenhed, at Høiden er liig Grundfladens Diameter.

Sv. $\begin{cases} \text{Cylinderens Høide eller Grundflades Diameter} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} \\ \text{Keglens Høide eller Grundflades Diameter} = \sqrt[3]{2} \end{cases}$

XL. At beregne Cubikindholdet V af et Legem begrændset af to concentriske Kuglerflader: den førstes Radius $= 1^f 1^t$ dec., den andens Radius $= 1^f$.

Opl. $V = 1^{cf} 386^{ct} 489^{cl}$.. dec.

XLI. Man har tre Kugler: den førstes Cubikindhold $= 1^{cf} 1272^{ct}$, den andens Cubikindhold $= 2^{cf} 537^{ct}$ duodec., den tredies Cubikindhold $= 3^{cf}$; hvorledes forholde sig Diametrene.

Sv. Som 10 : 11 : 12.

XLII. Hvorstor er Overfladen S og Cubikindholdet V af en Kuglesector, naar Grundfladens, Zonens Høide $= 0^t,9$, og Kuglens Radius $= 2^t,9$.

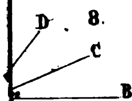
Opl. $\begin{cases} S = 35^{qt},531 .. \\ V = 15^{ct},852 .. \end{cases}$

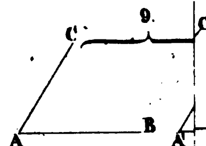
XLIII. Hvorstor er Cubikindholdet V af et Kuglesegment med een Grundflade, naar Segmentets Høide $= 3^t$ og Kuglens Radius $= 7^t$.

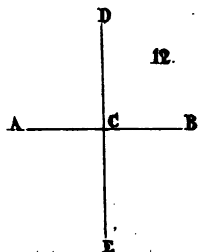
Opl. $V = 169^{ct},646$..

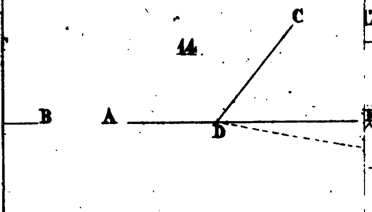
Anm. Naar om en Cirkel omskrives en ligesidet Triangel og Figuren dreier sig om en Diameter eller Axe, der gaaer gjennem Trianglens Toppunkt og er perpendiculær paa Grundlinien, da beskriver denne Triangel en Kegle omskreven om Kuglen, som beskrives af Cirklen; og man finder denne Kegles Overflade $= 9\pi R^2$ [R er Kuglens Radius] eller liig det Nidobbelte af Storcirklen. Nu er en om samme Kugle omskreven Cylinders Overflade liig det Sexdobbelte af Storcirklen [N° 312], og Kuglens Overflade det Fiirdobbelte af Storcirklen, altsaa forholder sig Keglens Overflade til Cylindrens til Kuglens som 9 : 6 : 4, men $9 \times 4 = 6^2$, hvoraf følger: at den omskrevne Cylinders Overflade er Mellemproportionalstørrelsen til Kuglens og den omskrevne Kegles Overflader.

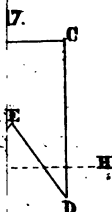
Man beviser samme Sætning med Hensyn til Kuglen, den i samme indskrevne Cylinder og indskrevne Kegle, beskrevne af Cirklen, det indskrevne Qvadrat og den indskrevne ligesidede Triangel; man finder nemlig Overfladen af Keglen $= \frac{9}{4}\pi R^2$, af Cylindren $= 3\pi R^2$, af Kuglen $= 4\pi R^2$, altsaa f. f. disse tre Overflader $= 9 : 12 : 16$, og af $9 \times 16 = 12^2$ følger Sætningen.

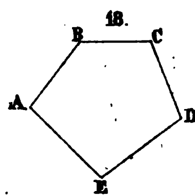

D
8.
C
B

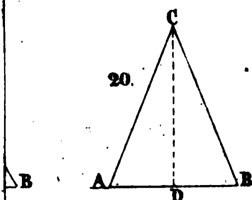

9.
C'
C
A
B
A'
B

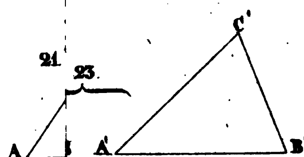

D
12.
A
C
B
E

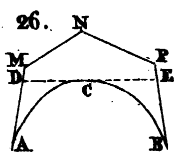

C
14.
B
A
D

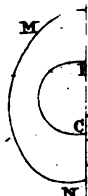

17.
C
E
H
D


18.
B
C
A
D
E

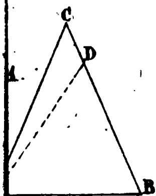

C
20.
B
A
B
D

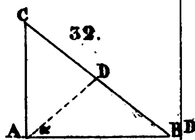

21
23.
C'
A
A'
B'

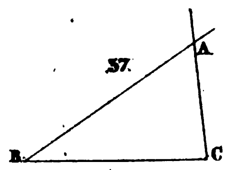

26.
N
M
P
D
E
C
A
B

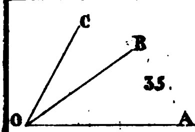

M
C
N

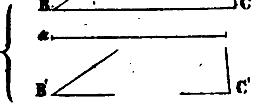

29.
C'
B
A'
B'


C
D
B


C
32.
D
A
a
B


37.
A
D
B
C


C
B
35.
O
A


a
B'
C'

II.

40.

43.

47

50.

52.

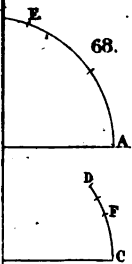
48

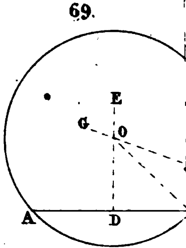
55

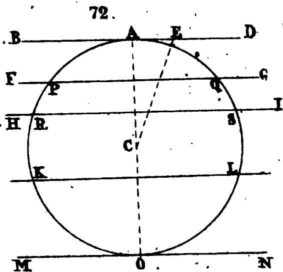
59.

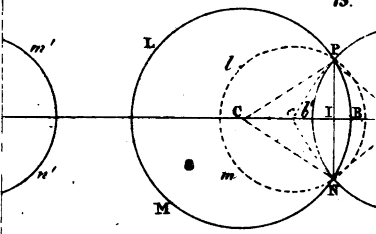
62.

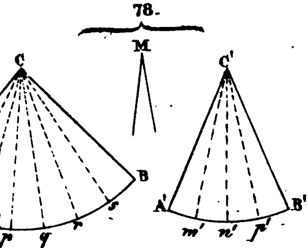
65.

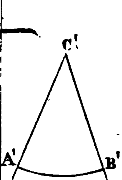

68.
E
A
D
F
C

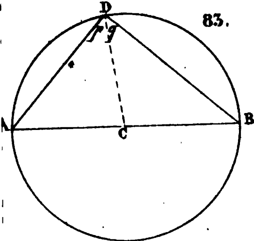

69.
E
G
O
A
D

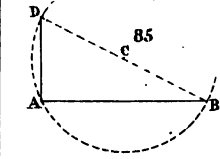

72.
B
A
E
D
F
P
Q
G
H
R
S
I
C
K
L
M
O
N

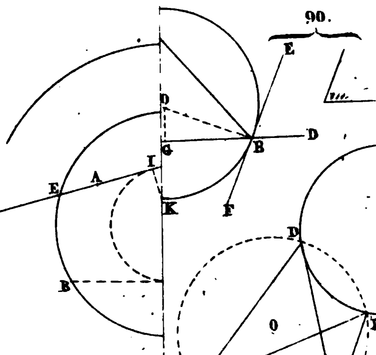

75.
m'
n'
L
P
l
C
b
I
B
m
N
M

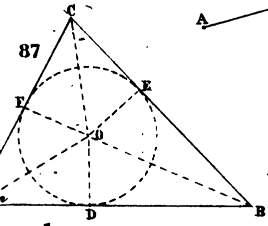

78.
M
C
C'
B
A'
B'
p
q
r
s
m'
n'
p'

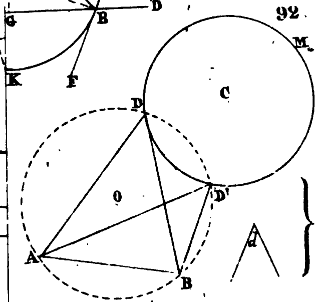

C'
A'
B'

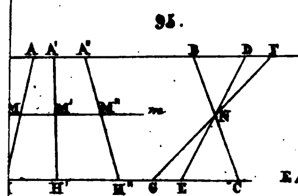

83.
D
A
C
B


85
D
C
A
B

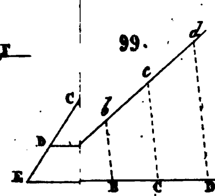

90.
E
D
B
G
I
A
E
A
K
F
B


87
C
F
E
O
D
B

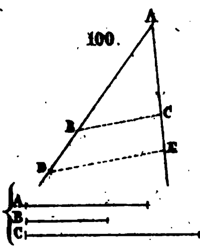

92.
M
C
D
O
D'
A
B



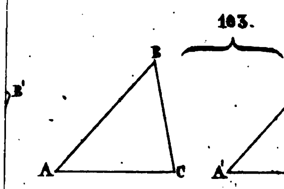
95.



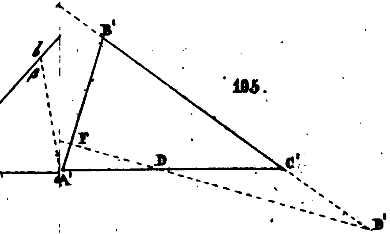
99.



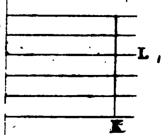
100.

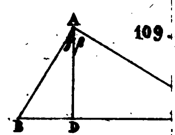


103.

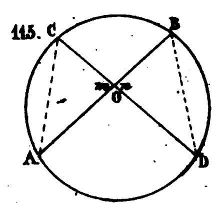


105.

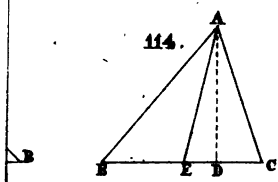




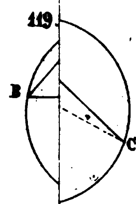
109.



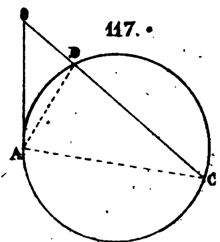
115.



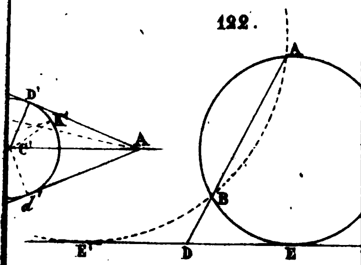
114.



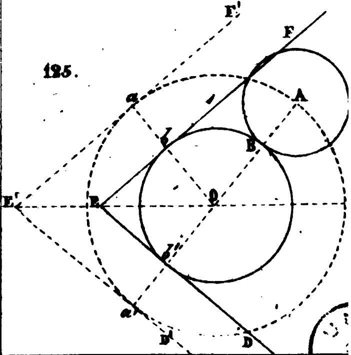
119.



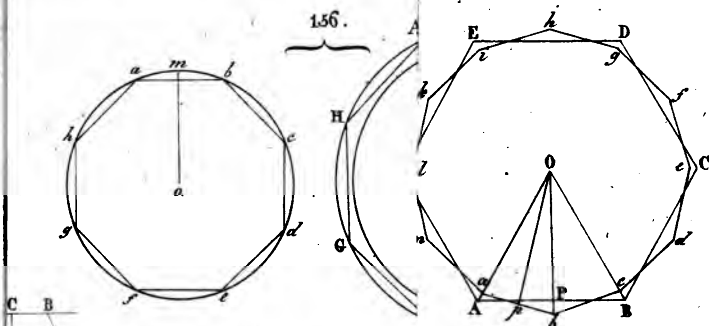
117.

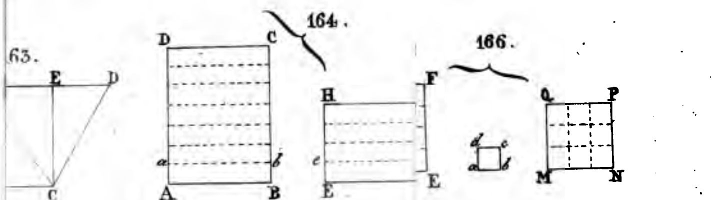


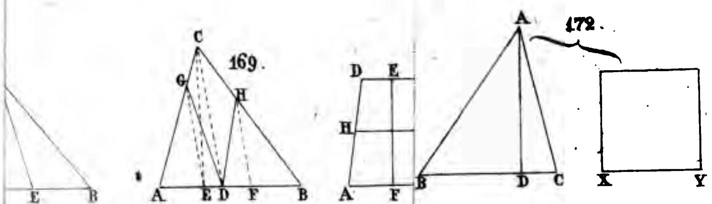
122.

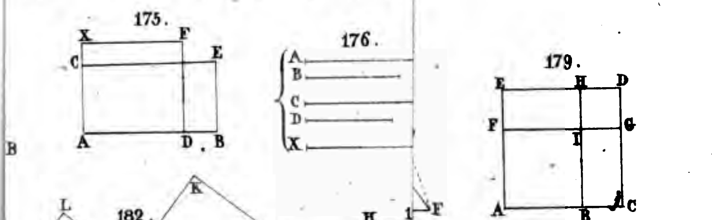


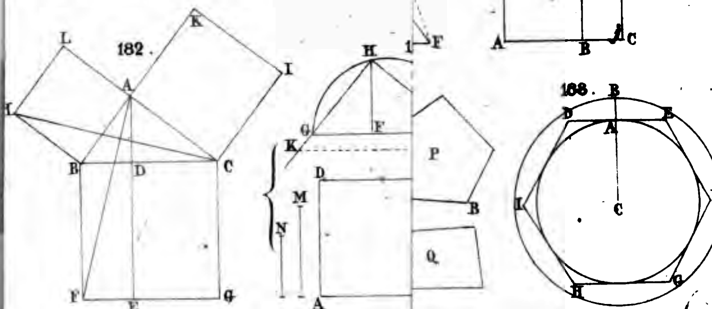
125.


156.
a m b
h c
o
g d
f e
H
G
A
159.
E h D
i g
f
l O e C
d
a c
A p P B
b


C B
D
163.
E D
C
164.
D C
a b
A B
H
e
E
F
E
166.
Q P
d c
a b
M N


E B
C
169.
G
H
A E D F B
D E
H
A F
A
172.
B D C
X Y


175.
X F
C E
A D B
B
176.
A
B
C
D
X
179.
E H D
F G
I
A B C


182.
L K
A
I
B D C
F E G
H
G F
K
D
M
N
A
P
B
Q
188.
B
D A E
I C F
H G